



Archeops et la préparation de la mission Planck : détermination des paramètres cosmologiques

Stephane Bargot

► To cite this version:

Stephane Bargot. Archeops et la préparation de la mission Planck : détermination des paramètres cosmologiques. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2006. Français. NNT : . tel-00473559

HAL Id: tel-00473559

<https://theses.hal.science/tel-00473559>

Submitted on 15 Apr 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE de DOCTORAT de L'UNIVERSITÉ
PARIS 11**

présentée par

Stéphane BARGOT

en vue de l'obtention du grade de Docteur de l'Université de Paris 11

Spécialité : Astrophysique et instrumentation

**Archeops et la préparation de la mission Planck :
Détermination des paramètres cosmologiques**

Soutenue le 24 janvier 2006, devant le jury composé de

Guy Wormser	président
Jim Bartlett	rapporteur
Jim Rich	rapporteur
Alain Abergel	
Reza Ansari	
F.X. Désert	

Table des matières

1	Modèle Cosmologique Standard	5
1.1	Les 3 piliers de la cosmologie standard	6
1.1.1	Expansion de l'univers	6
1.1.2	Nucléosynthèse primordiale	8
1.1.3	Fond de rayonnement à 3K	10
1.2	Le cadre de la relativité générale	12
1.2.1	Histoire thermique de l'univers	15
1.2.2	Tests classiques du modèle : âge de l'Univers, distance de luminosité, distance de diamètre angulaire	16
1.2.3	Formation des structures	18
1.3	Observations récentes	20
1.3.1	Supernovae de Type Ia	20
1.3.2	Relevés de galaxie et spectre de puissance	23
1.3.3	Observation des amas de galaxies	25
1.3.4	Lentilles et cisaillement gravitationnels	26
1.3.5	Fond diffus cosmologique	28
1.4	Inflation et fluctuations primordiales	30
1.4.1	Les problèmes du modèle classique de Big Bang	30
1.4.2	Réponse de l'inflation aux problèmes du modèle clas- sique de Big Bang	31
	Bibliographie	34
2	Fluctuations cosmologiques et spectre de puissance du fond diffus cosmologique	36
2.1	Description des fluctuations cosmologiques et des anisotropies de température	37
2.1.1	Description des fluctuations cosmologiques	37
2.1.2	Description des anisotropies de température	39
2.2	Anisotropies primaires	40
2.2.1	Echelles plus grandes que l'horizon à la recombinaison	40
2.2.2	Petites échelles angulaires et pics acoustiques	42
2.2.3	Effet de projection	50
2.3	Les anisotropies secondaires	53
2.3.1	L'effet Sachs-Wolfe intégré	53
2.3.2	La réionisation homogène	54
2.3.3	L'effet Sunyaev-Zel'dovich	54

2.4	Influence des principaux paramètres cosmologiques sur le spectre de puissance angulaire C_ℓ	56
2.4.1	Influence de la géométrie : rôle de Ω_{tot} et Ω_Λ	56
2.4.2	Influence du contenu en matière de l'univers : Ω_{CDM} et Ω_b	58
2.4.3	Influence de l'indice spectral scalaire n_s	59
2.4.4	Influence de la constante de Hubble H_0	59
2.4.5	Réionisation	61
2.4.6	Polarisation	61
2.5	LUC et la position du premier pic	62
2.5.1	LUC : Little Universe Calculator	64
2.5.2	Comparaison ℓ_{pic} LUC - CAMB	66
Bibliographie		69
3	Les observations du fond diffus cosmologique	70
3.1	Les principes de détection	71
3.1.1	La détection hétérodyne	71
3.1.2	La détection bolométrique	71
3.1.3	Le mode interférométrique	72
3.1.4	Unités utilisées dans les expériences CMB	73
3.1.5	Quantification des performances d'un détecteur	75
3.2	Les expériences passées	80
3.2.1	Le satellite COBE	82
3.2.2	Boomerang	84
3.2.3	MAXIMA	86
3.2.4	Les expériences interférométriques : DASI, VSA et CBI	88
3.3	Les expériences présentes et futures	91
3.3.1	Expériences sur la polarisation	91
3.3.2	WMAP	91
3.3.3	Archeops	93
3.3.4	Planck-HFI	99
3.3.5	Planck-LFI	100
3.4	Résumé des caractéristiques et des résultats des expériences	101
3.4.1	Caractéristiques expérimentales	101
3.4.2	Résultats	102
Bibliographie		105
4	Méthodes pour l'estimation des paramètres cosmologiques à partir de la courbe de C_ℓ	107
4.1	Reconstruction des cartes de température	107
4.2	Estimation du spectre de puissance C_ℓ	109
4.2.1	Signification du spectre de puissance	110
4.3	Estimation des paramètres cosmologiques	111
4.3.1	Exposé général du problème	111
4.3.2	Résultats antérieurs	114
4.3.3	Calcul des spectres de puissance	117

4.3.4	Grille de modèles et base de données	118
4.3.5	Hypercube et représentation de l'espace des paramètres	122
4.4	Minimisation et marginalisation	127
4.4.1	Minimisation du χ^2	128
4.4.2	Parcours de l'espace des paramètres et marginalisation	130
4.4.3	Exploitation des résultats de l'ajustement	131
4.5	Test de l'interpolation multilinéaire. Amélioration de l'inter- polation	132
4.5.1	Test de l'interpolation multilinéaire	132
4.5.2	Amélioration de l'interpolation	135
Bibliographie		139
5	Estimation des paramètres cosmologiques à partir de la courbe de C_ℓ	140
5.1	Méthode utilisée	140
5.1.1	Ajustement et temps de calcul	143
5.2	Résultats : simulations de type WMAP	143
5.2.1	Mesures générées à partir d'un modèle CAMB	144
5.2.2	Mesures générées à partir d'un modèle interpolé . . .	147
5.2.3	Corrélations entre les paramètres ajustés	149
5.2.4	Conclusion partielle	153
5.3	Résultats : simulations de type Planck	154
5.3.1	Mesures générées à partir d'un modèle CAMB	154
5.3.2	Mesures générées à partir d'un modèle interpolé . . .	158
5.3.3	Courbure autour du minimum de χ^2 et estimation des erreurs	164
5.3.4	Corrélations entre paramètres ajustés	167
5.4	Ajustements des données actuelles	172
5.4.1	Archeops seul	172
5.4.2	Archeops et CBI	175
5.4.3	WMAP	176
5.4.4	Archeops, WMAP et CBI	177
Bibliographie		184

Chapitre 1

Modèle Cosmologique Standard

Le modèle le plus utilisé pour décrire l'univers est appelé modèle du “Big Bang”. Il postule que l'univers actuel est issu d'une phase chaude et dense, et qu'il s'est refroidi au cours de l'expansion à la température actuelle, à l'image d'un gaz qui se détend dans un piston.

Ce modèle a été construit progressivement à partir des années 50, sur les bases de la relativité générale et du principe cosmologique (§1.2), qui stipule que l'univers à grande échelle est isotrope et homogène, avec comme objectif l'explication de l'observation de la fuite des galaxies par Hubble (§1.1.1) et l'abondance des éléments légers (§1.1.2). Ce modèle a aussi permis de prédire l'existence du fond diffus cosmologique (§1.1.3), découvert en 1965. Ces observations ont permis de faire les premières hypothèses quant à l'histoire de notre univers, mais ce n'est que très récemment que les observations en cosmologie ont permis de tester quantitativement le modèle cosmologique standard.

On verra dans ce chapitre comment les observations actuelles (§1.3) permettent de mesurer avec précision les paramètres de ce modèle et de donner une vue détaillée de l'histoire de l'Univers. Ces observations posent aussi des questions sur le domaine de validité de ce modèle, à haute énergie en particulier où les tests du modèle cosmologique rencontrent les tests du modèle standard de la physique des particules. J'introduirai aussi quelques notions sur l'inflation, qui permettent de donner une explication à trois observations cosmologiques :

- l'isotropie du fond diffus cosmologique à grande échelle,
- la platitude de l'espace, révélée en particulier par les observations récentes du fond diffus cosmologique,
- l'origine des inhomogénéités ayant donné naissance aux grandes structures cosmiques.

Enfin je conclurai sur le rôle complémentaire des différentes observations cosmologiques actuelles (fond diffus, SNIa, cisaillement gravitationnel, etc ...)

1.1 Les 3 piliers de la cosmologie standard

1.1.1 Expansion de l'univers

Les premières observations de la récession des galaxies ont été effectuées dans les années vingt, par E. Hubble et M.L. Humason (figure 1.1 (Hubble 1931)). Celui ci a remarqué que plus les galaxies étaient éloignées de nous, plus leur spectre était décalé vers le rouge. En effet, considérons une galaxie s'éloignant de nous à une vitesse $v_{||}$, alors une raie émise à une longueur d'onde λ_e sera observée à λ_0 telle que (dans la limite non relativiste $v_{||}/c \ll 1$) :

$$\lambda_0/\lambda_e - 1 = v_{||}/c = z, \quad (1.1)$$

où z est le décalage vers le rouge, ou redshift. L'observation par Hubble de ce décalage dans un grand nombre de galaxies a montré que ce décalage était proportionnel à la distance des galaxies, ce qui est exprimé par la loi de Hubble :

$$v_{||} = cz = H_0 r. \quad (1.2)$$

H_0 étant la constante de Hubble et r est la distance à cette galaxie. Cette loi est valable pour des vitesses de récession faibles devant c .

L'évaluation de ce paramètre de Hubble est difficile car il faut connaître la distance de l'objet dont on mesure le redshift. Il existe actuellement plusieurs méthodes de détermination de la constante de Hubble :

- par l'utilisation de la relation de Tully-Fisher pour les galaxies spirales,
- par l'utilisation des Supernovae de type Ia,
- par l'utilisation de la différence de temps d'arrivée de la lumière entre deux images d'une lentille gravitationnelle,
- La fluctuation de la brillance de surface des galaxies,
- la relation du “plan fondamental” des galaxies elliptiques.

Les deux premières méthodes sont des méthodes utilisant des objets dont la luminosité intrinsèque est calibrée grâce à des objets proches du même type, appelés “chandelles standards”. La mesure du flux lumineux provenant de la chandelle permet l'évaluation de la distance de luminosité :

$$d_l^2 = \frac{\mathcal{L}}{4\pi f},$$

où \mathcal{L} est la luminosité intrinsèque de l'objet et f le flux reçu par l'observateur. Cette calibration est faite en utilisant la relation période-luminosité des céphéides. A nouveau cette relation est calibrée grâce aux céphéides du Petit Nuage de Magellan. Cette échelle de distance souffre d'incertitudes à chaque niveau, en particulier la distance au petit nuage de magellan ($\pm 10\%$) et ce sont ces incertitudes qui constituent la principale source d'erreur systématique sur H_0 par ces méthodes.

Plus précisément, la relation de Tully-Fisher relie la luminosité d'une galaxie spirale à la largeur de la raie à 21cm de l'Hydrogène, qui est dominée par la rotation d'ensemble de la galaxie. Cette relation semi empirique exprime le fait que dans un objet en équilibre gravitationnel, l'énergie potentielle E_p et l'énergie cinétique T satisfont au théorème du Viriel :

$$E_p + 2T = 0 \quad (1.3)$$

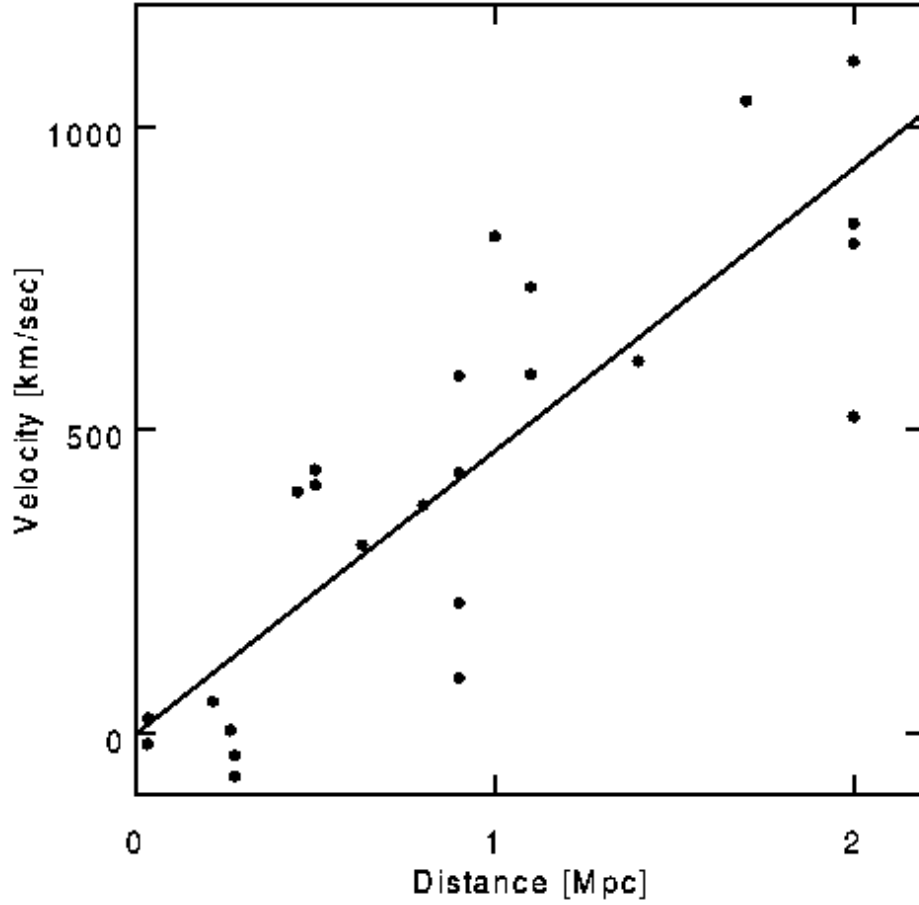


FIG. 1.1 – *Observation de Hubble en 1929 d'une proportionnalité entre la vitesse de récession des galaxies et la distance à ses galaxies.*

La masse de la galaxie et la vitesse des objets dans la galaxie sont donc reliées. On suppose ensuite que la masse et la luminosité sont reliées entre elles. La relation de Tully-Fischer permet donc d'estimer la luminosité intrinsèque d'une galaxie à travers une mesure spectroscopique de sa dispersion de vitesse.

La mesure du flux apparent permet alors d'obtenir la distance de luminosité, et connaissant le décalage spectral, une valeur de H_0 .

Les supernovae de type Ia sont considérées comme des chandelles standards. Leur luminosité au maximum varie en effet peu d'une supernova à l'autre. Ce sont des naines blanches qui subissent une explosion thermonucléaire. La naine blanche explose lorsque sa masse dépasse la masse de Chandrasekhar (Chandrasekhar 1931), à la suite d'une accrétion de matière. La mesure de la courbe de lumière des SNIa permet alors une évaluation de H_0 .

Ces deux méthodes sont utilisées par le HST Key Project dans (Freedman et al. 2001) pour obtenir une estimation de la valeur de la constante de

Hubble :

$$H_0 = 72 \pm 3 \text{ (statistique)} \pm 7 \text{ (systematique)} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}.$$

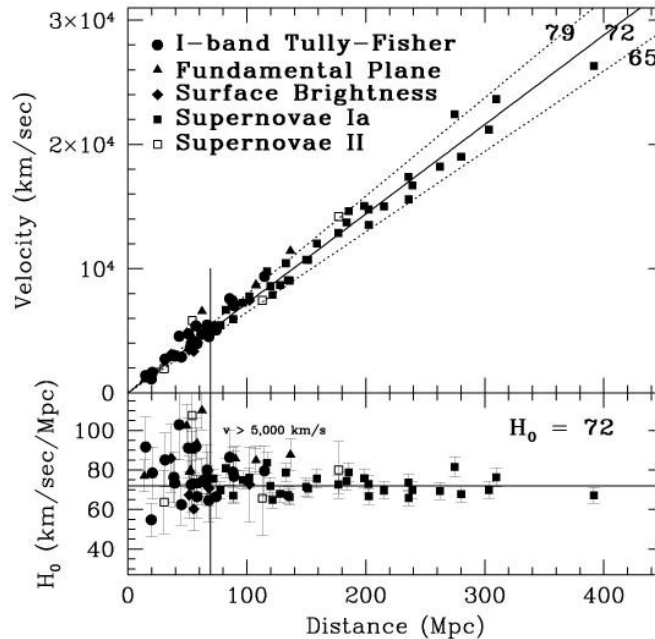


FIG. 1.2 – *Diagramme de Hubble du Hst Key Project.*

La troisième méthode, décrite dans (Refsdal 1964), présente l'avantage de ne pas nécessiter de calibration, mais la méconnaissance de la distribution de masse dans la lentille gravitationnelle limite actuellement la précision de cette méthode. (Burud 2002) donnent par exemple deux estimations $H_0 = 63 \pm 9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ et $H_0 = 51 \pm 9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ pour les mêmes données mais pour des modèles de lentille différents.

1.1.2 Nucléosynthèse primordiale

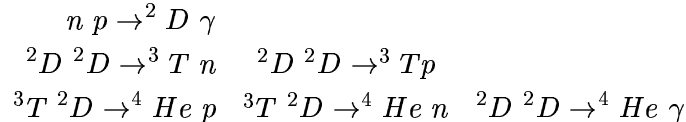
Le deuxième pilier de la théorie du Big Bang est la nucléosynthèse primordiale. Cette théorie a été élaborée dans les années 60 (après avoir été initiée par Gamow) pour expliquer deux faits liés aux mesures d'abondance en Hélium 4 :

- l'impossibilité de produire l'abondance en Hélium 4 observée uniquement à partir de la nucléosynthèse stellaire,
- l'observation d'une abondance en Hélium 4 "universelle" (O'dell, Peimbert, & Kinman 1964).

La nucléosynthèse primordiale explique la synthèse des éléments légers (D, ^3He , ^4He , ^7Li) dans le cadre du Big Bang. Dans la phase chaude et dense, quelques secondes après le Big Bang, les conditions sont réunies pour permettre la fusion des protons et des neutrons en noyaux. L'énergie moyenne

des neutrons et des protons est alors de l'ordre d'une soixantaine de keV , ce qui permet aux protons et aux neutrons de s'assembler pour former des noyaux stables. L'énergie à laquelle se produit cette réaction est sensiblement plus faible que l'énergie de liaison des noyaux car c'est la photodissociation qui limite la production de noyaux dans l'univers primordial. En effet, le nombre de photons présents dans l'univers est de l'ordre de 10^{10} fois le nombre de baryons, et donc la queue de la distribution en énergie des photons suffit à dissocier les noyaux formés au dessus de $T \simeq 60keV$.

A cette température, les réactions suivantes permettent en particulier la formation du Deutérium 2D et de l'Hélium 4He :



Les taux de ces réactions dépendent de la densité, pour chacune des réactions, des éléments de départ, qui dépendent directement de la densité totale de baryons. La théorie de la nucléosynthèse primordiale prédit donc les abondances des éléments légers en fonction d'un seul paramètre, le rapport entre la densité de baryons et la densité de photons, $\eta = \rho_b/\rho_\gamma$ (figure 1.3). ρ_γ est une fonction connue de la température, la connaissance de η nous renseigne donc sur le contenu en baryons de l'univers ρ_b .

Cependant, les mesures qui permettent d'étudier η sont difficiles car elles sont entachées de biais dus à la nucléosynthèse stellaire. On essaie donc de trouver des objets dans lesquels se sont formées peu d'étoiles, comme les nuages de gaz moléculaire froids, où sont observées des raies d'absorption dans les spectres des quasars. La forme de ces raies permet de retrouver le rapport entre un élément léger et l'Hydrogène, que l'on considère comme primordial. Les détections actuelles concernent le Deutérium (Pettini 2001), le Lithium (Suzuki 2000), l'Helium 3 (Balser 2001) et 4 (Peimbert 2000). Le Deutérium est brulé très efficacement dans les étoiles.

L'abondance du Deuterium est mesurée dans 3 milieux différents :

- dans le milieu interstellaire local D_{ISM} ,
- dans la nébuleuse proto solaire D_{ps} ,
- dans les nuages présents sur les lignes de visées vers des quasars lointains D_{clouds} .

Il y a plusieurs mesures de D_{ISM} qui se trouvent dans l'intervalle $5 \times 10^{-6} < D_{ISM} < 2 \times 10^{-5}$. La valeur de D_{ps} est donnée par les mesures d'abondances dans le système solaire (Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, comètes), $D_{ps} = (3 \pm 0.3) \times 10^{-5}$. Enfin l'abondance de Deuterium a été mesurée grâce aux raies d'absorption des nuages de gaz le long de la ligne de visée des quasars, abondance que l'on suppose être primordiale. (Tytler et al. 2000) obtiennent par l'analyse des spectres de 3 quasars $D_{clouds} = 3 - 4 \times 10^{-5}$. Cette valeur est proche de celle de D_{ps} et impliquerait une faible destruction de D dans l'histoire de la galaxie, en contradiction avec les connaissances sur le taux de formation d'étoiles en fonction de z . Cependant, l'analyse du spectre d'un quatrième quasar dans le même article conduit à une valeur plus haute de D_{clouds} dans l'intervalle $8 \times 10^{-5} < D_{clouds} < 3 \times 10^{-4}$.

L'abondance primordiale de l'Hélium est mesurée dans les régions HII (nuages d'Hydrogène une fois ionisé) de faible métallicité (peu d'éléments lourds comme l'oxygène). Les étoiles fabriquent au cours de leur vie de l'Hélium, de l'Oxygène et du Carbone. Il faut donc extrapoler l'abondance de l'Hélium à une métallicité nulle pour obtenir le taux d'Hélium primordial. on mesure en général Y_p , la fraction en masse d'Hélium. (Izotov & Thuan 1998) donnent une valeur $Y_p = 0.245 \pm 0.004$ tandis que (Peimbert 2000) donnent $Y_p = 0.238 \pm 0.005$.

Enfin l'abondance du Lithium 7 est déterminée par l'observation des étoiles du halo. On suppose que la destruction du ${}^7\text{Li}$ est négligeable lors de la nucléosynthèse stellaire. (Olive, Steigman, & Walker 2000) obtiennent les limites suivantes pour l'abondance du Lithium : $1.4 \times 10^{-10} < {}^7\text{Li}/H < 2.2 \times 10^{-10}$.

Ces résultats sont passés en revue dans (Vangioni-Flam 2000) (voir figure 1.3) et sont compatibles avec deux intervalles du rapport baryon-photon ($\eta_{10} = 10^{10} \rho_b / \rho_\gamma$) :

$$1.5 < \eta_{10} < 1.9 \text{ ou}$$

$$3.3 < \eta_{10} < 5.1$$

La densité de photon étant déterminée par la température du fond diffus cosmologique ($n_\gamma = 412 \text{ cm}^{-3}$), on obtient les contraintes suivantes sur $\Omega_b h^2$:

$$0.006 < \Omega_b h^2 < 0.008 \text{ ou} \tag{1.4}$$

$$0.012 < \Omega_b h^2 < 0.019. \tag{1.5}$$

1.1.3 Fond de rayonnement à 3K

Le fond de rayonnement cosmologique à 3 Kelvin est le troisième pilier de la cosmologie standard. Il a été découvert en 1965 par Penzias et Wilson (Penzias 1965), alors que ceux ci utilisaient une antenne de télécommunication des laboratoires Bell, aux Etats-Unis, pour observer le rayonnement radio dans la direction de Cassiopée A. Ils ont alors détecté une source de "bruit", isotrope, dont le flux correspondait à l'émission d'un corps noir à une température de 3 degrés Kelvin.

En 1948, Gamow (Gamow-1948) avait prédit l'existence d'un rayonnement isotrope, comme la conséquence d'une phase chaude et dense dans les premiers instants de l'univers. Ce rayonnement était alors en équilibre avec la matière, et devait donc avoir un spectre de corps noir à l'origine. Les calculs montrent alors que l'on devrait observer un rayonnement de corps noir ayant une température de l'ordre de quelques Kelvins¹.

Température du rayonnement de fond cosmologique Imaginons dans un univers chaud et dense que le rayonnement soit en équilibre avec la matière (par diffusion Thomson, comme nous le verrons plus tard). Dans

¹On ne peut calculer la température du corps noir que si l'on connaît l'âge et la géométrie de l'Univers

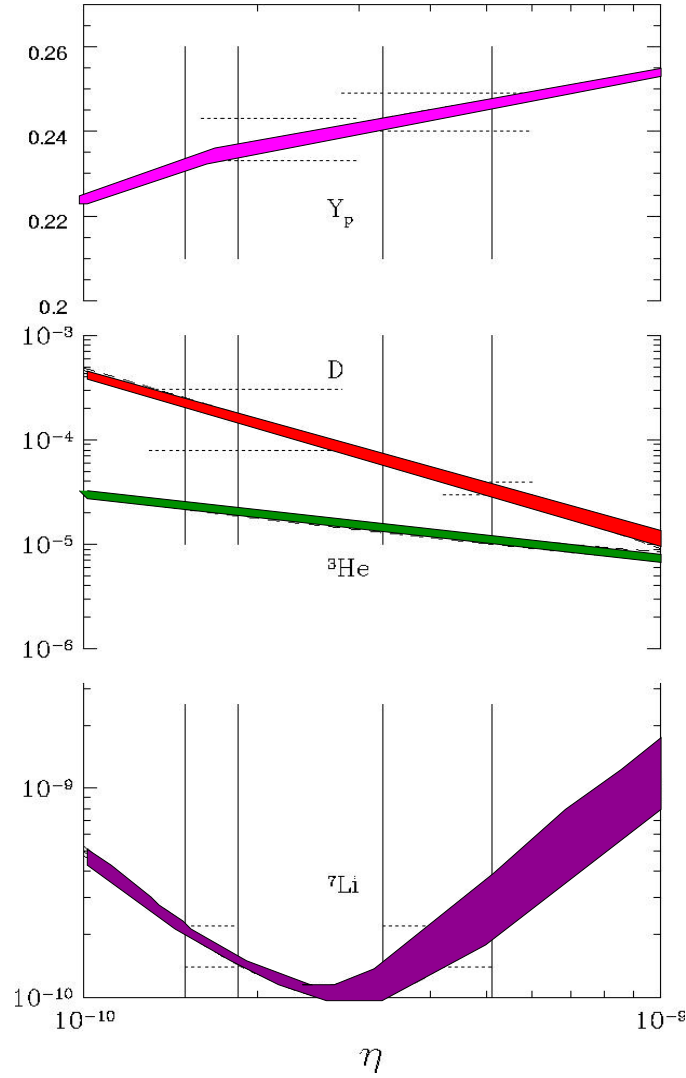


FIG. 1.3 – *Résultats de la nucleosynthèse primordiale sur les abondances des éléments légers en fonction du rapport baryons/photons η . Les barres verticales représentent les limites sur η données par les analyses sur le ${}^7\text{Li}$*

cette phase, les électrons ne sont pas liés aux noyaux. Puis, la température de l'univers baisse en raison l'expansion de l'univers, et les électrons se lient aux noyaux. L'univers devient alors transparent au rayonnement. Le rayonnement émis à ce moment (redshift z_e , température T_e) suit la loi de densité suivante :

$$n(\nu, T_e) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT_e} - 1} \quad (1.6)$$

Le nombre total de photons dans un volume comobile reste constant au cours de l'histoire de l'univers puisque ceux ci n'interagissent plus avec la matière, on observe donc le même nombre de photons aujourd'hui :

$$n(\nu_e, T_e)V_e d\nu_e = n_0(\nu_0)V_0 d\nu_0$$

où V désigne l'élément de volume et l'indice $_0$ désigne le temps présent ($z_0 = 0$). Or :

$$V_0 = (1 + z_e)^3 V_e \quad \text{et} \quad d\nu_0 = \frac{d\nu_e}{1 + z_e}$$

La distribution de photons aujourd'hui est donc :

$$\begin{aligned} n_0(\nu_0) &= \frac{n(\nu_e, T_e)}{(1 + z_e)^2} \\ &= \frac{8\pi\nu_e^2}{c^3(1 + z_e)^2} \frac{1}{e^{h\nu_e/kT_e} - 1} \\ &= \frac{8\pi\nu_0^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_0(1+z_e)}{kT_e}} - 1} \end{aligned} \tag{1.7}$$

En posant $T_0 = \frac{T_e}{1+z_e}$, on aboutit à :

$$n_0(\nu_0) = \frac{8\pi\nu_0^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_0}{kT_0}} - 1} \tag{1.8}$$

Un rayonnement ayant un spectre de corps noir reste celui d'un corps noir, mais à une température plus basse, dans un univers en expansion. On observe donc aujourd'hui un rayonnement de corps noir dont la température est $T_0 = T_e/(1 + z_e)$. Pour le fond diffus cosmologique, l'émission a lieu à la recombinaison z_{rec} donc $T_0 = T_{rec}/(1 + z_{rec})$

L'interprétation de ce rayonnement en termes cosmologiques est le fait de Dicke et Peebles (Dicke 1965) qui à l'époque construisaient eux aussi une antenne afin de détecter le corps noir cosmologique. Penzias et Wilson recevront le prix Nobel en 1978 pour leur découverte.

1.2 Le cadre de la relativité générale

Ces trois "piliers" forment le socle observationnel du modèle standard cosmologique. Celui-ci repose sur la relativité générale, qui décrit la gravitation de manière géométrique. La distance entre 2 événements d'espace-temps est donnée en relativité générale par :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.9}$$

où $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique, fonction des coordonnées spatio-temporelles (x^μ) dans le cas général. La dynamique gravitationnelle est décrite par l'équation d'Einstein qui relie le tenseur métrique au contenu matière-énergie de l'Univers :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{1.10}$$

Dans cette équation, $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de courbure, fonction de $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées secondes, R est la trace de $R_{\mu\nu}$, G est la constante de Newton, Λ est la constante cosmologique, et $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion qui décrit la matière. Le tenseur $R_{\mu\nu}$ est la contraction du tenseur de Riemann $R^\alpha_{\mu\nu\beta}$:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\nu\alpha}.$$

Le tenseur de Riemann est donné par :

$$R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} + \Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}$$

où :

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right).$$

La composante T_{00} de ce tenseur est proportionnelle à la densité (d'énergie) du fluide, alors que les composantes T_{ij} représentent les flux de quantité de mouvement p_i dans les directions j . Pour un fluide idéal, $T_{\mu\nu}$ prend la forme suivante :

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

ρ étant la densité du fluide et p sa pression. Dans les modèles cosmologiques, on considère en général un univers composé de plusieurs fluides (matière noire, énergie noire, baryons, photons, etc ...) chacun caractérisé par une equation d'état.

Métrie de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) Dans le cadre de la relativité générale, on inclut le principe cosmologique qui stipule :

- l'isotropie de l'espace,
- l'homogénéité de l'espace.

Ces deux hypothèses sont vérifiées à grande échelle, par l'uniformité de la température du fond diffus dans toutes les directions (isotropie) et par l'homogénéité à grande échelle de la distribution de la matière. Un choix judicieux des coordonnées (r, θ, ϕ, t) permet alors d'écrire la mètrique sous la forme :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi) \right] \quad (1.12)$$

$R(t)$ est une fonction du temps t définissant le facteur d'échelle global de la géométrie de l'Univers et k une constante. On normalise généralement r de telle sorte que $k = -1, 0$ ou $+1$. k caractérise la géométrie de l'univers illustrée schématiquement sur la figure suivante :

- $k = -1$ pour un univers ouvert (fig. 1.4, gauche),
- $k = 0$ pour un univers plat (fig. 1.4, milieu),
- $k = 1$ pour un univers fermé (fig. 1.4, droite).

$a(t) = R(t)/R_0$ est le facteur d'échelle sans dimension de l'univers, (R_0 valeur de $R(t)$ aujourd'hui). On définit alors le taux d'expansion $H(t)$ par la relation :

$$H = \frac{\dot{a}}{a}.$$

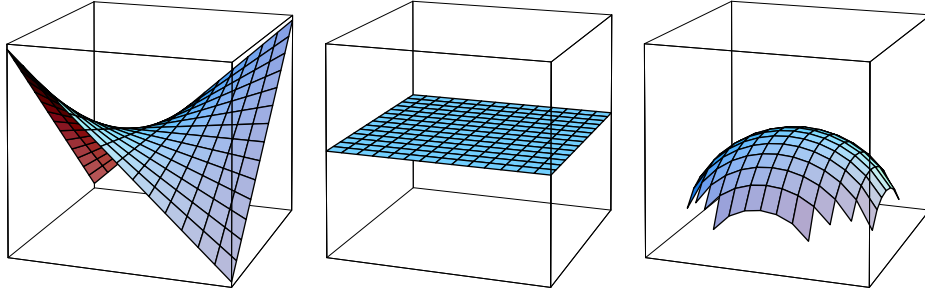


FIG. 1.4 – Représentation schématique des différentes géométries de l'univers. À gauche, géométrie de courbure négative, au milieu de courbure nulle, et à droite de courbure positive.

La valeur de $H(t)$ aujourd'hui ($z = 0$) est appelée constante de Hubble (H_0). On peut aussi réécrire la métrique en utilisant la coordonnée angulaire χ telle que :

$$d\chi = \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}}.$$

La métrique prends alors la forme suivante :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)[d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi)] \quad (1.13)$$

où $S_k(\chi)$ est égale à $\sin\chi$, χ ou $\sinh\chi$ suivant que k vaut 1, 0 ou -1.

Equation de Friedmann En calculant le tenseur de courbure et en utilisant l'équation d'Einstein 1.10, on obtient les équations de Friedman qui décrivent l'évolution dans le temps du facteur d'échelle $a(t)$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} = \frac{8}{3}\pi G(\rho_m + \rho_r) + \frac{\Lambda}{3} = \frac{8}{3}\pi G\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.14)$$

pour un univers décrit par un fluide parfait de densité ρ et de pression p , on a :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.15)$$

A ces deux équations s'ajoute celle de conservation de l'énergie-impulsion :

$$d(\rho a^3) + pd(a^3) = 0. \quad (1.16)$$

l'équation 1.14 relie entre autres le contenu en énergie de l'univers à sa géométrie, puisque k apparait dans celle ci. Il existe en particulier une densité ρ_c dite "critique" correspondant à un Univers plat ($k = 0$, $S(\chi) = \chi$) et de géométrie euclidienne :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.17)$$

Cette densité critique varie au cours du temps, puisqu'elle dépend du paramètre de Hubble $H(t)$. Sa valeur actuelle est de l'ordre de :

$$(\rho_c)_0 \simeq 1.88 \cdot 10^{-26} h_0^2 \text{ kg m}^{-3} \quad (1.18)$$

$$(\rho_c)_0 \simeq 1.05 \cdot 10^{-5} h_0^2 \text{ GeV cm}^{-3} \quad (1.19)$$

où $h = H_0/100$, avec H_0 exprimé en $\text{km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Evolution dans le temps du facteur d'échelle $a(t)$ Pour déterminer complètement le système (a, ρ, p) , il nous faut une relation (équation d'état) entre p et ρ pour chaque espèce en présence (matière, énergie du vide, rayonnement). On peut la prendre de la forme générique $p = w\rho$. En substituant la forme $p = w\rho$ dans l'équation 1.16, on obtient :

$$\begin{aligned} d(\rho a^3) + w \rho da^3 &= 0 \\ \frac{d\rho}{\rho} &= (1+w) \frac{da^3}{a^3} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (1.20)$$

Si $k = 0$, on obtient d'après l'équation 1.14 :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \rho \quad (1.21)$$

Lorsque l'évolution de l'Univers est dominée par l'une des espèces présentes, décrites par une équation d'état de la forme $p = w\rho$, l'évolution du facteur d'échelle $a(t)$ s'exprime sous une forme simple :

– pour un univers dominé par le rayonnement :

$$p = 1/3 \rho \ (w = 1/3) \Rightarrow \rho \propto a^{-4}(t), \ a(t) \propto t^{1/2} \quad (1.22)$$

– pour un univers dominé par la matière :

$$p = 0 \ (w = 0) \Rightarrow \rho \propto a^{-3}(t), \ a(t) \propto t^{2/3} \quad (1.23)$$

– si une constante cosmologique ou l'énergie du vide domine la densité totale présente :

$$p = -\rho \ (w = -1) \Rightarrow \rho \propto cste, \ a(t) \propto e^{\beta t} \text{ avec } \beta \propto \sqrt{\rho_\Lambda} \quad (1.24)$$

1.2.1 Histoire thermique de l'univers

Compte tenu des 3 piliers de la cosmologie et de la théorie de la relativité générale, on peut alors décrire l'histoire thermique de l'univers. La température de l'Univers décroît au fur et à mesure de l'expansion, donnant naissance à différentes phases dans l'évolution de l'Univers.

Univers primordial La physique de l'Univers primordial est encore mal connue.

- A l'échelle de Planck ($t \sim 10^{-43} s$, $T \sim 10^{19} GeV$) les lois de la physique actuelle ne sont plus valides et il faut traiter de manière unifiée la gravitation et les interaction quantiques (interactions forte, faible, et électromagnétique).
- à cette échelle d'énergie, l'Univers est constitué d'une soupe de quarks libres, de leptons, en équilibre avec leurs antiparticules, de bosons de jauge (W,Z), de bosons de Higgs, de gluons et de photons.

- à $t \sim 10^{-35}$ ($T \sim 10^{14} - 10^{16} GeV$), les intensités de l'interaction électrofaible et de l'interaction forte sont comparables. C'est l'échelle de grande unification. C'est aussi à cette échelle d'énergie que se produit l'inflation.
- à $t \sim 10^{-12}$ ($T \sim 100 GeV$) apparait la brisure de symétrie électrofaible. On entre dans le domaine connu et testé par la physique en accélérateur.

T=10⁹ K, t= 1 minute : la nucléosynthèse primordiale La température devient suffisamment faible pour que les noyaux des éléments légers tels que l'Hélium et le lithium soit produits, dans des proportions données par les modèles de nucléosynthèse primordiale (voir §1.1.2).

T=65000 K, t=1500 ans : l'égalité matière-radiation La densité d'énergie décroît pour la radiation comme la puissance quatrième du facteur d'échelle, alors que pour la matière, c'est en fonction du cube du facteur d'échelle ($\rho_{rad} \propto a^{-4}$, $\rho_m \propto a^{-3}$). Partant des rapports entre ces densités aujourd'hui, on peut calculer le temps et la température lorsque ces densités étaient comparables. Ce moment est particulièrement important du point de vue des fluctuations cosmologiques, puisqu'il correspond à la valeur maximale de la longueur de Jeans $\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}$ en dessous de laquelle la pression s'oppose à l'effondrement gravitationnel (c_s est la vitesse du son).

T=3000 K, t=300000 ans : La recombinaison A ce moment, les électrons et les noyaux se recombinent. Le libre parcours moyen des photons devient plus grand que le rayon de Hubble et l'Univers devient neutre. L'Univers ne subit plus de transition de phase jusqu'à aujourd'hui, les fluctuations de densité peuvent s'effondrer gravitationnellement puisque la pression du gaz est devenue nulle. Les grandes structures de l'Univers se forment d'abord dans un régime de croissance linéaire, puis dans une phase plus complexe, non linéaire, et où des effets dissipatifs et de rayonnement doivent être pris en compte.

1.2.2 Tests classiques du modèle : âge de l'Univers, distance de luminosité, distance de diamètre angulaire

Je vais décrire ici quelques uns des tests classiques utilisés en cosmologie pour éprouver la validité du modèle cosmologique.

Age de l'Univers Les équations de Friedman 1.14 permettent de calculer facilement l'intervalle de temps entre deux époques en fonction du facteur d'échelle :

$$\begin{aligned}
 t - t_1 &= \int_{a(t_1)}^{a(t)} \frac{da}{\dot{a}} \\
 &= H_0^{-1} \int_{a(t_1)}^{a(t)} \frac{da}{a(\Omega_R \hat{a}^{-4} + \Omega_M \hat{a}^{-3} + (1 - \Omega_T) \hat{a}^{-2} + \Omega_\Lambda)^{1/2}}
 \end{aligned}$$

avec $\hat{a} = \frac{a(t)}{a_0}$. On peut en particulier calculer l'âge de l'Univers en prenant $t_1 = 0$ et $t = t_0$ aujourd'hui (Rich 2001) :

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{d\hat{a}}{\hat{a}(\Omega_M \hat{a}^{-3} + (1 - \Omega_T) \hat{a}^{-2} + \Omega_\Lambda)^{1/2}} \quad (1.25)$$

où l'on a négligé la contribution de la densité d'énergie du rayonnement. Différentes méthodes permettent d'estimer l'âge de l'Univers, le plus souvent sous la forme d'une limite inférieure. On peut par exemple mentionner les limites obtenues à partir de l'estimation de l'âge des étoiles les plus vieilles de la galaxie (Chaboyer, Demarque, Kernan, & Krauss 1998).

Distance de luminosité Nous allons maintenant calculer le flux reçu en provenance d'une source de luminosité L , afin de faire le lien entre le flux reçu et la "distance de luminosité". Considérons une source de photons de luminosité L à la coordonnée radiale χ_1 . En un temps Δt_1 , la source émet N photons d'énergie E_1 ($L = NE_1/\Delta t_1$). A t_0 , moment de la réception des photons, ceux-ci sont distribués sur une sphère de rayon $a_0 \chi_1$. La surface de la sphère est alors $4\pi a_0^2 S_k^2(\chi_1)$ (voir eq. 1.13 pour la définition de $S_k(\chi)$). Les photons ont une énergie $E_0 = E_1 a_1/a_0$ et traversent la surface en un temps $\Delta t_0 = \Delta t_1 a_0/a_1$. Le flux est alors :

$$f = \frac{NE_0}{4\pi a_0^2 S_k^2(\chi_1) \Delta t_0} = \frac{NE_1/\Delta t_1}{4\pi a_0^2 S_k^2(\chi_1) (1+z)^2} = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (1.26)$$

qui définit la "distance de luminosité" :

$$d_L = a_0 S_k(\chi_1) (1+z). \quad (1.27)$$

Cette distance de luminosité est reliée aux paramètres cosmologiques par :

$$\chi_1 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)}$$

qui peut être calculé à l'aide des équations de Friedman (eq. 1.14). La figure 1.5 (en haut) représente la dépendance de d_L en fonction des paramètres cosmologiques (Ω_M, Ω_Λ) à $z=1$. On mesure la distance de luminosité grâce aux chandelles standards, en particulier les Supernovae de type Ia.

Distance de diamètre angulaire On peut aussi avoir besoin de la relation entre la taille angulaire d'une structure et sa taille physique (réelle). Dans ce cas c'est la "distance de diamètre angulaire" qui intervient. Considérons 2 points à la même distance radiale de l'observateur. La séparation angulaire entre ces deux points vaut $\Delta\Theta = (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)^{1/2}$. En utilisant la partie spatiale de la métrique, on peut aisément calculer la taille physique de l'objet $\Delta S = a_1 S_k(\chi_1) \Delta\Theta$. La distance de diamètre angulaire est définie par la relation :

$$\Delta\theta = \frac{\Delta S}{d_A}. \quad (1.28)$$

On obtient alors l'expression de d_A :

$$d_A = a_1 S_k(\chi_1) = \frac{a_0}{1+z} S_k(\chi_1), \quad (1.29)$$

soit en remplaçant par l'équation 1.27 :

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}$$

La figure 1.5 (en bas) représente la dépendance de d_A en fonction des paramètres cosmologiques $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ à $z=1000$.

1.2.3 Formation des structures

L'étude des anisotropies de température permet de connaître le contraste de densité de la matière baryonique à l'époque du découplage. Celui-ci ne dépasse pas $\frac{\delta\rho}{\rho} \simeq 10^{-5}$ à $z \simeq 1000$. Par ailleurs, le contraste de densité observé aujourd'hui est de l'ordre de 200 pour les objets en équilibre gravitationnel. La formation des structures décrit comment les grandes structures se forment à partir des fluctuations initiales de densité.

Le problème de base à résoudre est le suivant : dans quelles conditions une surdensité se contracte-t-elle pour donner naissance à une structure liée ? Dans un univers en expansion, il suffit que la densité moyenne de matière Ω_M soit égale à la densité critique ρ_0 . Dans ce cas, toute région où l'on trouve une surdensité a une densité supérieure à la densité critique. La gravitation peut alors jouer son rôle attractif, pour créer une structure liée.

Plus précisément, la théorie des perturbations linéaires permet de calculer le rythme de croissance des inhomogénéités en fonction de l'époque considérée (domination de la matière ou du rayonnement) tant que le contraste de densité $\delta = \delta\rho/\rho$ est petit devant 1 (Peacock 1998). Pour connaître le comportement des anisotropies en régime linéaire, on utilise 3 équations suivantes :

$$\text{équation de continuité} : \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \quad (1.30)$$

$$\text{équation du mouvement} : \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi \quad (1.31)$$

$$\text{équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel} : \nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (1.32)$$

où ρ est la densité du fluide, \mathbf{v} sa vitesse, p sa pression, et ϕ le potentiel gravitationnel. La résolution de ces équations pour des perturbations adiabatiques met en évidence une longueur, la longueur de "Jeans" :

$$\lambda_J = c_s \left(\frac{\pi}{G\rho} \right)^{1/2}.$$

Les perturbations d'une taille plus petite que λ_J sont stables et oscillent comme des ondes sonores. Les perturbations dont la taille est plus grande que λ_J s'effondrent gravitationnellement en un temps caractéristique

$$\tau_J \simeq (G\rho)^{-1/2}.$$

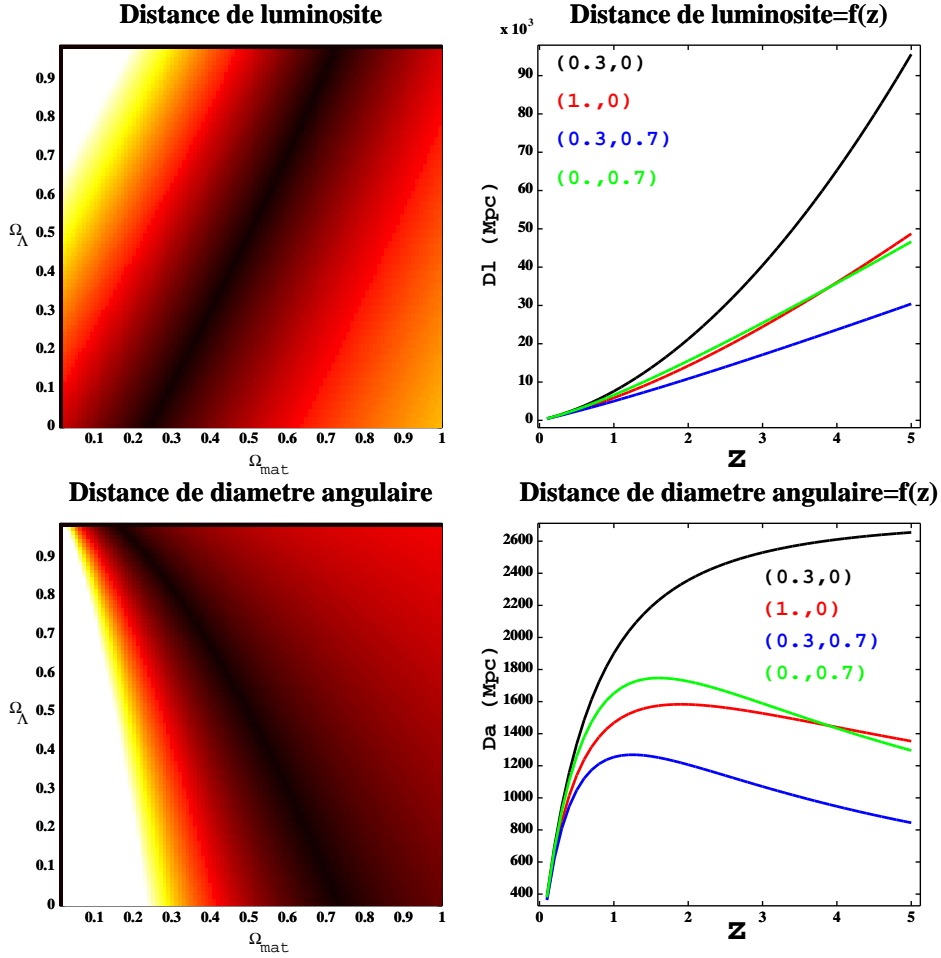


FIG. 1.5 – En haut à gauche : Distance de luminosité calculée à $z = 1$ (mesurée avec les supernovae de type Ia “lointaines”) pour le couple de paramètre $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$. La dégénérescence se situe le long de la ligne $\Omega_M + \Omega_\Lambda = \text{constante}$, on détermine avec une grande précision la différence. En haut à droite : Distance de luminosité en fonction de z pour plusieurs couples de paramètres cosmologiques $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$. En bas à gauche : Distance diamètre angulaire calculée à $z = 1000$ (mesurée avec le premier pic acoustique du fond diffus cosmologique). Ici c’est la somme $\Omega_M + \Omega_\Lambda = \Omega_{\text{tot}}$, donc la courbure de l’univers, que l’on va mieux contraindre. En bas à droite : Distance de diamètre angulaire en fonction de z pour plusieurs couples de paramètres cosmologiques $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$.

Dans un Univers en expansion, τ_J doit être comparé au temps caractéristique d’expansion de l’Univers H_0^{-1} pour savoir si une perturbation croît ou si elle est diluée par l’expansion de l’Univers.

Lorsque le contraste de densité devient de l’ordre de l’unité, l’approximation linéaire n’est plus valable et l’on doit faire appel à des calculs hydrodynamiques et à une résolution numérique des équations pour suivre l’évolution des inhomogénéités. Cette description n’est en fait actuellement utilisable

qu'en l'absence de matière baryonique, donc uniquement pour décrire la matière noire. Pour décrire le fluide de baryons, il faut en plus tenir compte de deux phénomènes :

- le refroidissement du gaz de baryons,
- l'apparition d'étoiles dans les régions les plus denses, qui produisent de l'énergie sous forme de rayonnement.

Actuellement les simulations hydrodynamiques reproduisent bien la distribution de la matière noire, mais rencontrent encore des difficultés concernant le comportement de la matière lumineuse (voir figure 1.6 pour la distribution de matière noire calculée numériquement).

Le modèle cosmologique présenté dans cette partie souffre cependant de plusieurs défauts. On utilise en général le modèle de l'inflation pour résoudre ces problèmes du modèle standard cosmologique :

- le problème de l'horizon,
- le problème de la platitude,
- le problème de la densité de particules reliques observées.

L'inflation permet aussi de donner une explication naturelle à l'existence des perturbations initiales de densité. Je reviendrai sur ce modèle inflationnaire à la fin du chapitre.

1.3 Observations récentes

Je parlerais dans cette section des observations qui ont révolutionné la cosmologie ces dix dernières années. De COBE en 1992 aux observations du cisaillement gravitationnel en passant par les observations des Supernovae de type Ia, la cosmologie est passée d'une science essentiellement qualitative et théorique à une science remarquablement contrainte par les résultats observationnels.

1.3.1 Supernovae de Type Ia

Les supernovae de type Ia sont des explosions d'étoiles en fin de vie, provoquées par l'explosion thermonucléaire d'une naine blanche proche de la masse de Chandrasekhar. La masse de Chandrasekhar est la masse critique d'une étoile en équilibre où la pression du gaz d'électrons peut compenser la force gravitationnelle. La naine blanche, composée essentiellement de carbone et d'oxygène, accrète de la matière d'une étoile compagnon. Quand sa masse approche de la masse de Chandrasekhar ($1.4M_{\odot}$), l'équilibre se rompt, entraînant le démarrage des réactions de fusion thermonucléaires. Ces explosions brûlent donc approximativement toute la même masse d'un mélange sensiblement uniforme d'où l'uniformité de leur luminosité absolue au maximum. La mesure de leur luminosité apparente permet donc de mesurer la distance de ces objets.

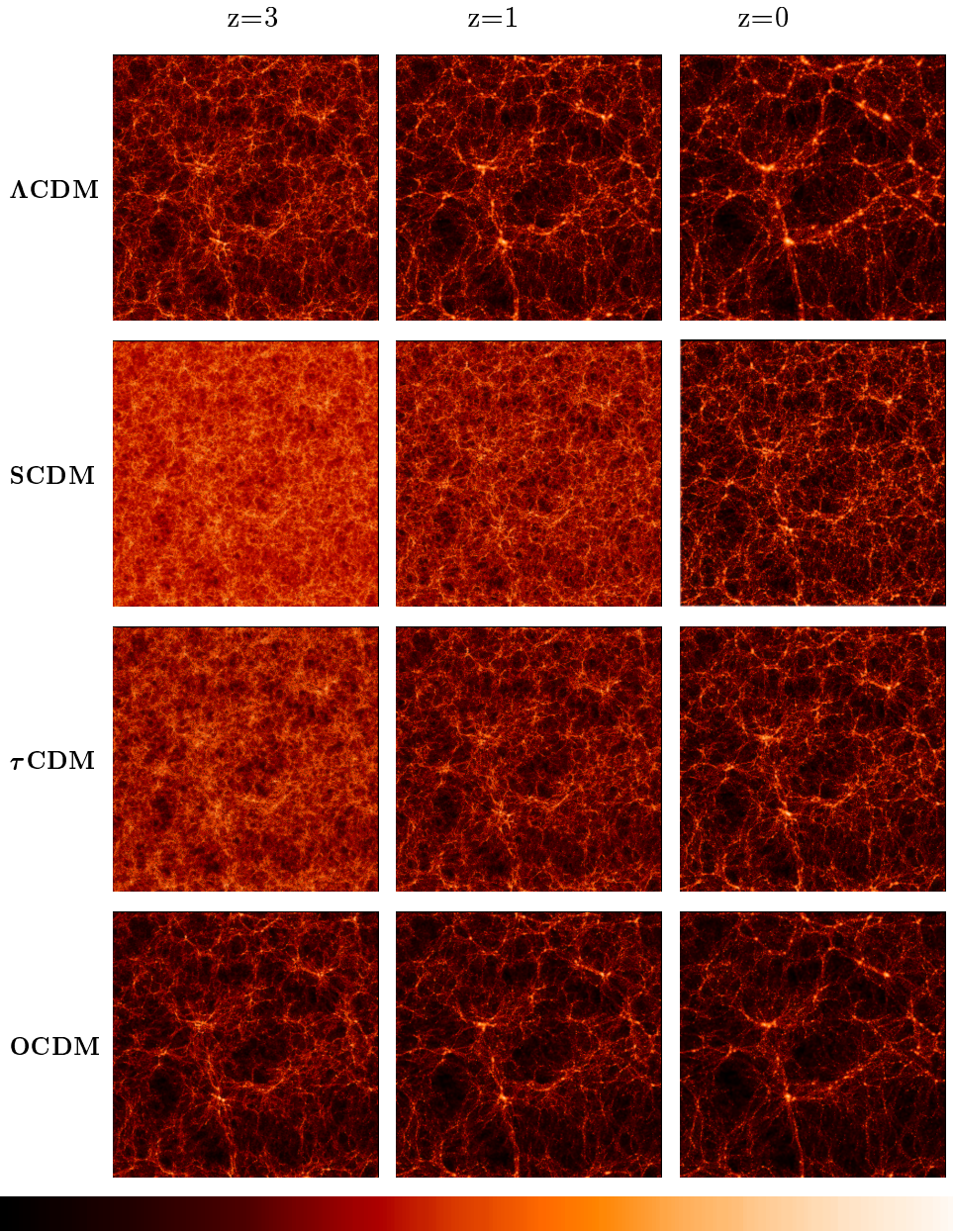


FIG. 1.6 – *Simulation numérique de formation de grandes structures (Jenkins et al. (1998)). Les images présentées représentent la distribution de matière noire. Les paramètres utilisés pour les simulations sont les suivants. ΛCDM : $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. SCDM : $\Omega_M = 1$, $\Omega_\Lambda = 0.$, $H_0 = 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. τCDM : $\Omega_M = 1$, $\Omega_\Lambda = 0.$, $H_0 = 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. OCDM : $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.$, $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.*

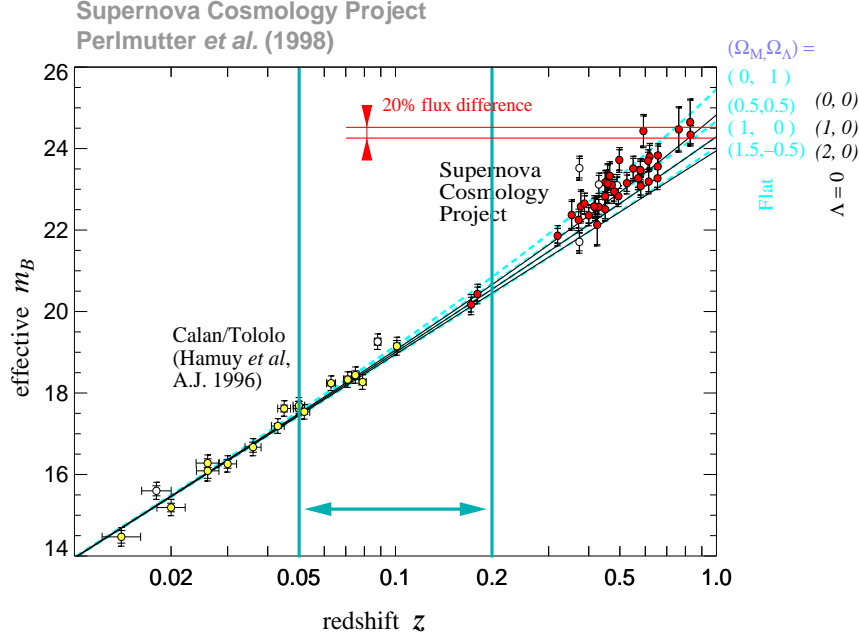


FIG. 1.7 – Diagramme de Hubble du Supernovae Cosmology Project mettant en évidence la déviation à une loi de Hubble simple $v = H_0 d$.

Deux collaborations *High-z Supernovae Team* (Riess et al. 1998) et *Supernovae Cosmology Project* (Perlmutter et al. 1999) ont étudié les supernovae à grand redshift et en ont déduit des contraintes sur les paramètres cosmologiques $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$. On peut voir sur la figure 1.5 que les contraintes apportées par l'étude des supernovae sont orthogonales à celles apportées par le fond diffus cosmologique, et constituent donc un test de consistance du modèle standard cosmologique. Les 2 collaborations ont mis en évidence une accélération de l'expansion de l'univers, induite par une constante cosmologique non nulle :

$$\Omega_\Lambda = 0.6^{+0.4}_{-0.5} \text{ et } \Omega_m = 0.4^{+0.5}_{-0.4}.$$

1.3.2 Relevés de galaxie et spectre de puissance

Les relevés de redshift de galaxies comme le 2dFGRS (Colless et al. (2001)) permettent de connaître la distribution de matière sur des échelles de l'ordre de quelques centaines de Mpc. La mesure du décalage spectral d'un grand nombre de galaxies (165000 dans le 2dFGRS) permet de reconstruire le spectre de puissance des anisotropies de la densité de matière. On effectue d'abord une cartographie du ciel, et on sélectionne ensuite les sources, des galaxies en général, qui seront étudiées. Leurs caractéristiques photométriques et spectroscopiques sont ensuite mesurées, permettant en particulier la détermination de leurs décalages vers le rouge. Les spectres sont en général mesurés à l'aide d'instruments permettant l'analyse spectrale de plusieurs objets dans le champ de vue du télescope, ceci afin de réduire le temps nécessaire aux observations. La deuxième étape consiste à construire la carte des fluctuations de densité projetée, comme sur la figure 1.8. Enfin, on calcule grâce à des transformées de Fourier le spectre de puissance de ces fluctuations.

Dans cette analyse, on considère que les fluctuations du nombre de galaxies Δn est relié à la fluctuations en masse $\Delta \rho$ par la relation suivante :

$$\frac{\Delta n}{n} = b \frac{\Delta \rho}{\rho}, \quad (1.33)$$

b étant appelé le biais. C'est la méconnaissance de b qui limite actuellement l'usage des comptages de galaxies pour estimer les paramètres cosmologiques. Les estimations les plus récentes (Percival et al. 2001) donnent :

$$\Omega_{mat} h = 0.20 \pm 0.03 \text{ et } \Omega_b / \Omega_{mat} = 0.15 \pm 0.07 \quad (1.34)$$

Forêts Lyman- α Le spectre des quasars présente à des longueurs d'ondes plus petites que 121.6 nm un ensemble de raies d'absorption. Ces raies sont présentes dans tous les spectres de quasars. La présence de ces raies quelque soit le redshift montre que ces raies sont dues à de l'absorption sur la ligne de visée et ne sont pas dûes au matériau éjecté par le quasar. Les simulations hydrodynamiques ont montré que ces raies d'absorption sont dues au milieu intergalactique. L'état thermique de ce gaz de faible densité ($\delta \rho / \rho < 10$) est déterminé par des processus physiques linéaires simples, ce qui aboutit une corrélation forte entre la profondeur optique Lyman- α (proportionnelle à l'absorption du rayonnement sur la ligne de visée) et la densité de matière sous-jacente (Croft et al. 1998)). Les analyses des raies d'absorption Lyman- α permettent donc de tracer la distribution de matière à grande échelle, et donc de déterminer le spectre de puissance $P(k)$ de la distribution de matière.

La figure 1.9 (Tegmark & Zaldarriaga 2002) résume l'état actuel de notre connaissance du spectre des fluctuations de densité $P(k)$, estimé à partir des anisotropies du fond diffus ($k \simeq 5 \cdot 10^{-2} \text{ Mpc}^{-1}$), des relevés de galaxie ($k \simeq 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$) et des observations de forêts Ly- α ($k \simeq 0.5 \text{ Mpc}^{-1}$).

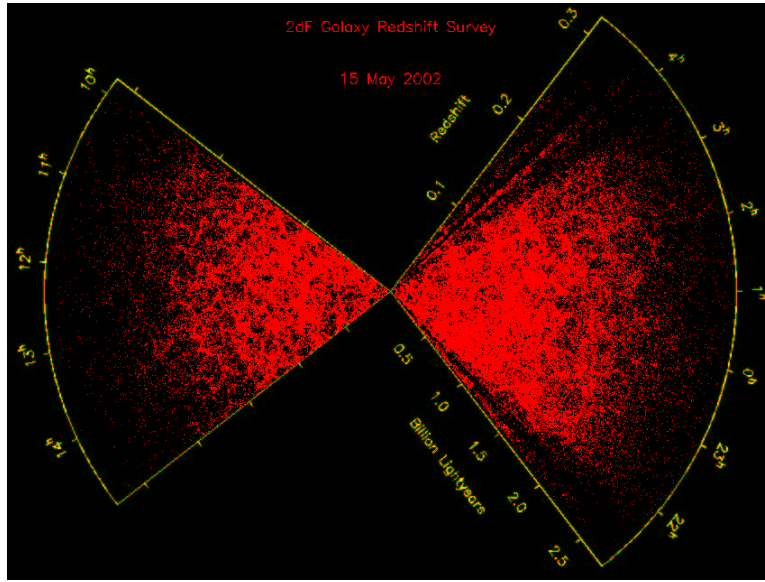


FIG. 1.8 – Carte du relevé de décalage spectral 2dFGRS. Les observations se sont faites dans des zones allongées selon un axe, puis projetée dans un plan perpendiculaire au grand axe. source : <http://msowww.anu.edu.au/2dFGRS>.

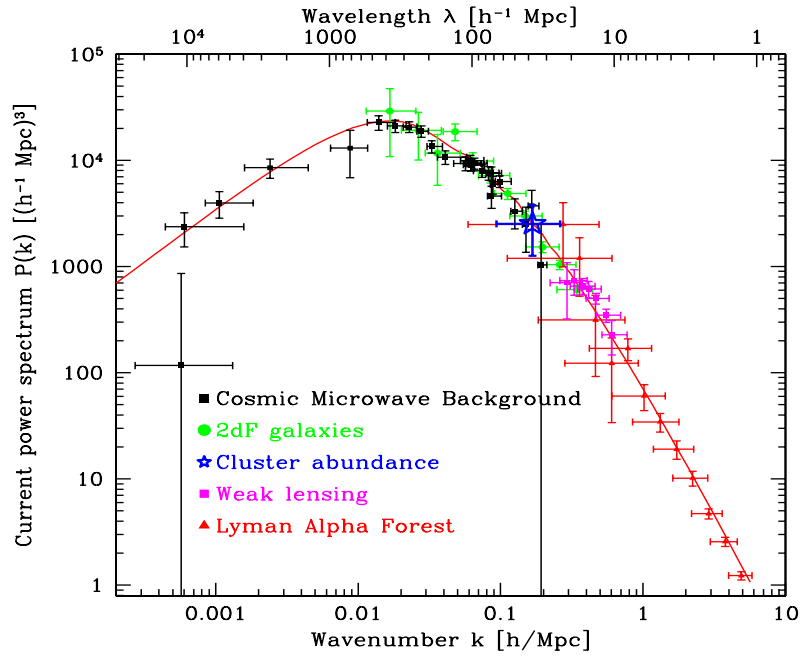


FIG. 1.9 – Connaissance actuelle du spectre de puissance des fluctuations de densité.

1.3.3 Observation des amas de galaxies

Effet Sunyaev-Zel'dovich Les amas de galaxies sont les plus grands objets en équilibre gravitationnel dans l'Univers. Ils sont constitués de galaxies et de gaz ionisé, dit "intra amas". On observe que ce gaz est très chaud ($T \sim 10^8 K$), ce qui est dû au fort potentiel gravitationnel de l'amas, et émet un rayonnement dans le domaine X par bremsstrahlung (rayonnement de freinage). Par ailleurs, le rayonnement du fond diffus cosmologique interagit avec ce gaz ionisé, par effet Compton. L'effet global produit par l'amas sur le spectre du corps noir est une distorsion proportionnelle à $\int n_e d\ell$, n_e étant la densité électronique de l'amas et s'appelle effet Sunyaev-Zel'dovich. Par contre, la brillance de surface dans le domaine X du rayonnement de freinage est proportionnelle à $\int n_e^2 d\ell$ pour une température donnée. La température du gaz intra-amas étant connue par ailleurs (grâce à la spectroscopie X), on peut donc évaluer la profondeur de l'amas, et, en supposant qu'il est sphérique, sa taille. L'observation de sa taille angulaire peut alors donner une estimation de la distance de diamètre angulaire (voir équation 1.29 pour les notations) :

$$d_a = \frac{\Delta S_{amas}}{\Delta \theta_{amas}}$$

$\Delta \theta_{amas}$ étant la taille angulaire de l'amas et ΔS_{amas} la taille physique de l'amas. Celle ci correspond dans la plupart des modèles au diamètre d'une sphère isotherme qui décrit le gaz intra amas. Comme la distance de luminosité dans le cas des Supernovae de type Ia, la distance de diamètre angulaire dépend des paramètres cosmologiques (Molnar, Birkinshaw, & Mushotzky 2002), et permettra de les mesurer.

Masse des amas La masse des amas peut être évaluée en mesurant la dispersion de vitesse des galaxies dans l'amas. En utilisant le théorème du Viriel (équation 1.3), on peut obtenir la masse gravitationnelle M_{vir} de l'amas. On peut aussi mesurer la masse du gaz à l'aide des observations en rayons X, ce qui permet une détermination de la fraction baryonique $(f_b)_{amas} = \frac{\rho_b}{\rho_{tot}} = \frac{M_{gaz}}{M_{vir}}$. En supposant que la fraction de baryons dans l'amas $(f_b)_{amas}$ est universelle, on peut estimer Ω_M en utilisant la détermination de Ω_b par la nucleosynthèse primordiale. Des mesures récentes (Castillo-Morales & Schindler 2003) donnent :

$$(f_b)_{amas} = 0.16 \pm 0.02 h_{50}^{-3/2}, \quad (1.35)$$

ce qui pour $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ et $\Omega_b = 0.044$, donne :

$$(f_b)_{amas} = \frac{\Omega_b}{\Omega_M} = 0.1 \Rightarrow \Omega_M \leq 0.4 \quad (1.36)$$

Evolution du nombre d'amas Une autre manière d'extraire des contraintes cosmologiques de l'observation des amas est d'étudier l'évolution du nombre d'amas en fonction du redshift. Considérons en effet une époque t_1 où la densité de matière est $\Omega_M(t_1)$ et où la variance des fluctuations de densité

de la matière à une échelle des amas ($\simeq 8Mpc$ en distance comobile vaut $\sigma_8(t_1)$). La gravitation Newtonienne permet de calculer $\sigma_8(t_0)$ aujourd'hui :

$$\sigma_8(t_0) = f(\sigma_8(t_1), \Omega_M(t_1)). \quad (1.37)$$

Comme on peut calculer facilement l'évolution de Ω_M , $\sigma_8(t_0)$ peut s'écrire :

$$\sigma_8(t_0) = \tilde{f}(\sigma_8(t_1), \Omega_M(t_0)). \quad (1.38)$$

Par ailleurs, on peut calculer, en utilisant un mécanisme d'effondrement sphérique ou un formalisme plus complexe (modèle de Press-Schechter (Press & Schechter 1974), simulations numériques N-corps), le nombre n_{amas} qui se forment entre t_1 et t_0 :

$$n_{amas}(t_0) = g(\sigma_8(t_1), \Omega_M(t_1)) = \tilde{g}(\sigma_8(t_1), \Omega_M(t_0)). \quad (1.39)$$

On peut alors combiner ces 2 équations pour éliminer $\sigma_8(t_1)$ au profit de $\sigma_8(t_0)$:

$$n_{amas}(t_0) = h(\sigma_8(t_0), \Omega_M(t_0)). \quad (1.40)$$

La mesure de la densité d'amas aujourd'hui et son évolution permet donc de contraindre le couple de paramètres $(\sigma_8(t_0), \Omega_M(t_0))$ ((Rich 2001) p.238). (Henry(2000)) estime les paramètres suivant à partir de l'évolution du nombre d'amas :

$$\Omega_M = 0.49 \pm 0.12 \text{ et } \sigma_8 = 0.72 \pm 0.10. \quad (1.41)$$

1.3.4 Lentilles et cisaillement gravitationnels

Lentilles gravitationnelles L'effet de lentille gravitationnelle est un effet prévu par la théorie de la Relativité générale. La présence de masse défléchit le trajet de la lumière comme indiqué sur la figure 1.10

Dans un cadre cosmologique, cet effet permet de mesurer directement la distribution de masse dans les régions centrales des amas. La masse calculée de cette manière peut être comparée à la masse obtenue en mesurant les dispersions de vitesses des galaxies.

Par ailleurs, dans le régime dit "faible", la déformation moyenne des galaxies en arrière plan permet de reconstruire complètement le potentiel gravitationnel de l'objet.

Régime de lentille faible : Cisaillement gravitationnel Le cisaillement gravitationnel est un outil récent de la cosmologie moderne (Mellier 1999). On décrit l'effet d'une lentille gravitationnelle sur une image de fond par une matrice \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}$$

L'image subit une déformation isotrope (terme κ), et une déformation anisotrope qui transforme un objet circulaire en ellipse dont l'orientation est perpendiculaire au gradient du potentiel gravitationnel (termes γ_1 et γ_2).

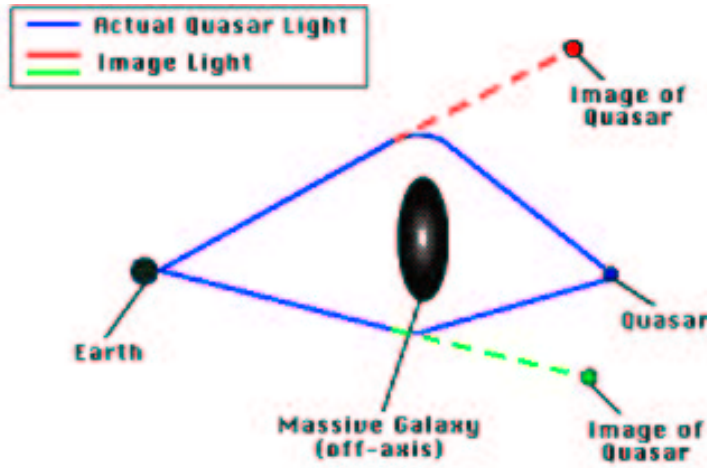


FIG. 1.10 – Schéma descriptif d'une lentille gravitationnelle. Dans ce cas, l'objet qui fait office de lentille est une galaxie, et l'objet dédoublé par la lentille est un quasar.

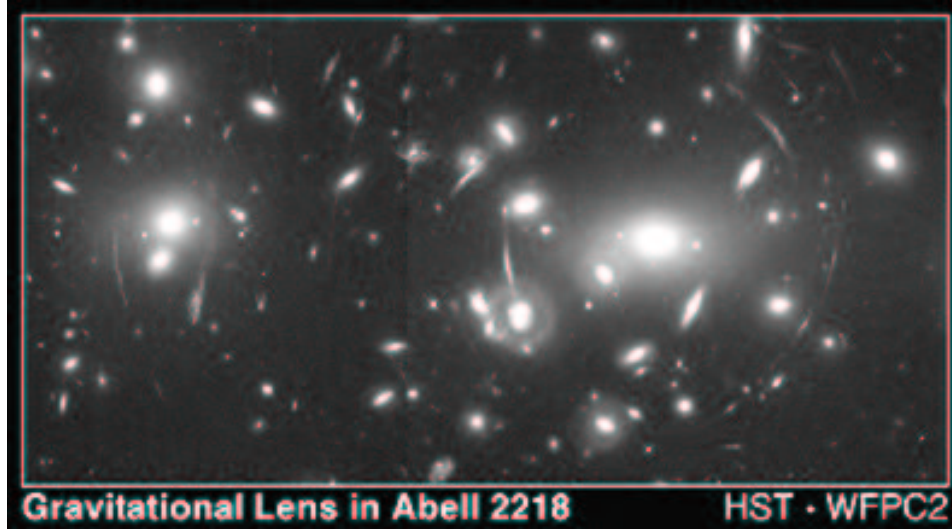


FIG. 1.11 – Image d'un champ de galaxie pris avec le télescope spatial Hubble. L'amas de galaxie présent entre les galaxies d'arrière plan et l'observateur produit des distorsions sous la forme d'arcs gravitationnels.

Dans le régime de lentille faible, on ne peut mesurer que les propriétés statistiques des images pour en extraire en particulier la dispersion de la composante anisotrope $\langle \gamma^2 \rangle$ qui dépend des paramètres cosmologiques (Ω_M, σ_8). Les contraintes tirées des dernières observations (Van Waerbeke et al. 2001) donnent :

$$\sigma_8 \Omega_{mat}^{0.6} = 0.48^{+0.04}_{-0.05} \text{ (95\% C.L.)}$$

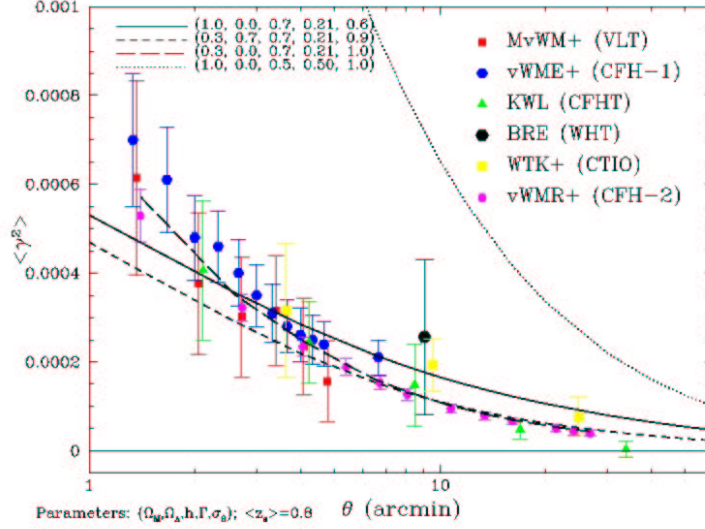


FIG. 1.12 – Estimation du cisaillement gravitationnel moyen $\langle \gamma^2 \rangle$. Le cisaillement gravitationnel est relié à la mesure de l'éllipticité moyenne des galaxies du champ. source : <http://terapix.iap.fr/Descart/>.

1.3.5 Fond diffus cosmologique

En 1992, le satellite COBE a publié la première détection de fluctuations dans le fond diffus cosmologique (Smoot et al. 1992). Ces fluctuations, de faible amplitude, ($\frac{\Delta T}{T} \simeq 10^{-5}$) avaient été prédites pour expliquer la présence des structures à grande échelle. Cette détection a lancé la recherche de fluctuations à des échelles inférieures au degré, ce qui n'était pas possible pour COBE, limité à une résolution de 7 degrés. Cobe, via l'instrument FIRAS (Far InfraRed Absolute Spectrometer) a permis aussi de confirmer de manière définitive le fait que le rayonnement à 3K correspond à celui d'un corps noir (figure 1.14), ainsi qu'une détermination précise de sa température (Fixsen & Mather (2002)) :

$$T_{CMB} = 2.725 \pm 0.001 K$$

En 2000, les expériences Maxima et BOOMERANG ont présenté des résultats confirmant la détection de fluctuations dans le fond diffus cosmologique à des échelles de l'ordre de la dizaine de minute d'angle. La présence de pics acoustique à une échelle de 1 degré dans le spectre de puissance suggère fortement que $\Omega_{tot} = 1$ et conforte la théorie de l'inflation (voir §1.4 et figure 1.5) Depuis 2000, des expériences d'interférométrie ont obtenu aussi des résultats probants, confirmant ceux de l'année 2000. En 2002, l'expérience Archeops a pour la première fois permis de relier le spectre de puissance des anisotropies de température obtenus par COBE et ceux obtenus par Maxima et BOOMERANG, avant que WMAP montre en 2003 un spectre de puissance réunissant les grandes échelles de COBE et les échelles en dessous du degré.

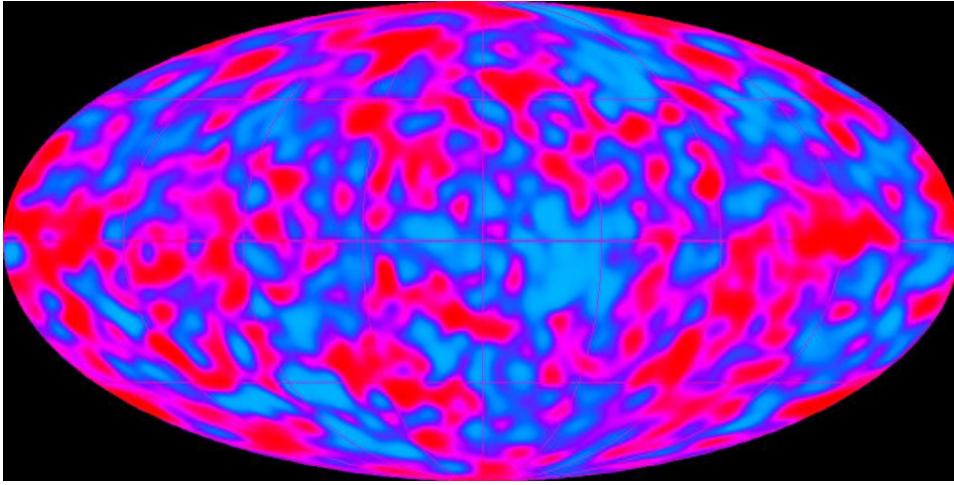


FIG. 1.13 – Carte de l'instrument DMR du satellite COBE des fluctuations de température du fond diffus à la résolution angulaire de 7 degrés.

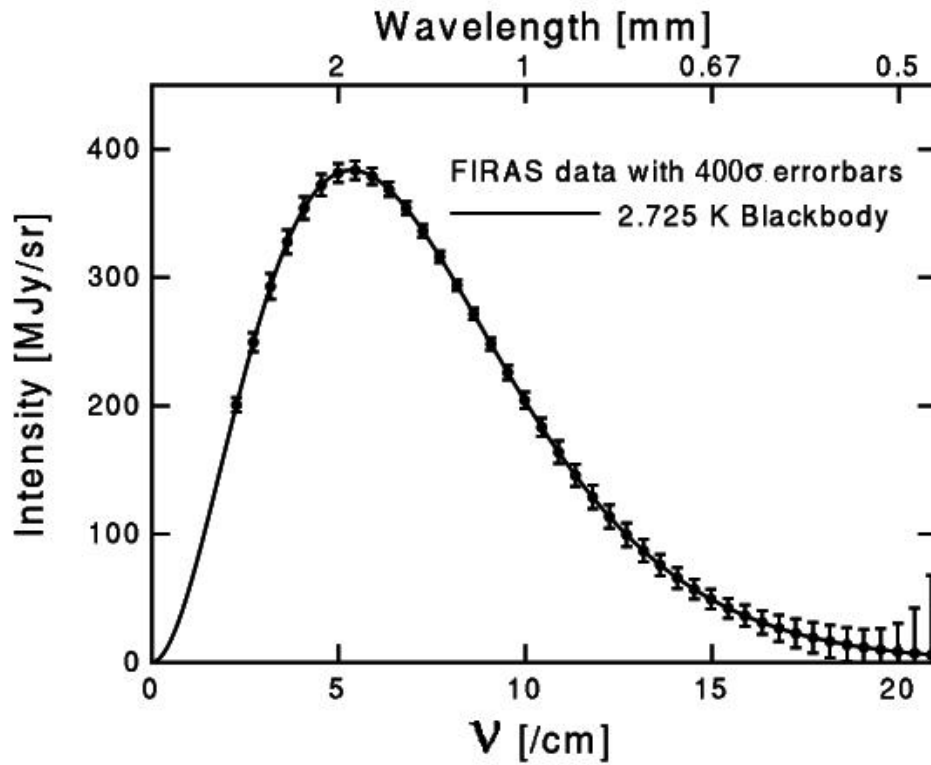


FIG. 1.14 – Spectre du rayonnement de fond micro ondes mesuré obtenu par l'instrument FIRAS du satellite COBE. Un spectre de corps noir à 2,725 K est aussi représenté sur la figure, les barres d'erreurs correspondent à des déviations à 400σ

Je reviendrai en détail sur toutes ces expériences dans le chapitre 3.

1.4 Inflation et fluctuations primordiales

Au début des années 1980, trois problèmes restaient sans réponse dans le modèle cosmologique :

- Le problème de l’horizon,
- le problème de la platitude de l’univers,
- le problème des fossiles de l’univers primordial

Je décrirai dans cette partie un peu plus précisément ces trois problèmes, puis je montrerai succinctement comment les modèles simples d’inflation apportent un début de réponse à ces questions (Guth 1981).

Par ailleurs, dans le modèle cosmologique tel que je l’ai décrit dans ce chapitre, il n’existe pas de mécanisme qui explique l’existence des fluctuations de densités à l’origine de la formation des structures cosmiques. En effet, pour qu’il existe des structures cosmiques, il est nécessaire que l’univers ne soit pas totalement homogène. La production naturelle de ces inhomogénéités est aujourd’hui un argument fort en faveur des modèles inflationnaires.

1.4.1 Les problèmes du modèle classique de Big Bang

Problème de l’horizon Les photons émis de régions diamétralement opposées au moment de la recombinaison sont quasiment à la même température, ce qui implique qu’ils ont été en équilibre thermique entre eux. Pourtant, la taille de l’horizon au découplage ne dépasse pas deux degrés. La taille de l’horizon $h(t)$ correspond à la distance maximum de propagation pour les photons et se calcule facilement dans le modèle du Big Bang :

$$h(t) = \int_0^{t_{rec}} \frac{dt}{a(t)}$$

Il est donc impossible, dans le cadre du scénario classique de Big Bang, que l’ensemble de l’Univers observable ait été thermalisé au moment du découplage.

Problème de la platitude On peut réécrire l’équation de Friedmann 1.14 :

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2} \quad (1.42)$$

Pendant l’évolution de l’univers, le facteur $a^2 H^2$ diminue, donc Ω s’éloigne de 1, sauf si elle est exactement égale à l’unité. Aujourd’hui, Ω est de l’ordre de 1, on a donc dans le passé :

$$\begin{array}{lll} \text{Epoque de la nucléosynthèse} & (t \sim 1 \text{ sec.}) & |\Omega - 1| < \mathcal{O}(10^{-16}) \\ \text{Epoque de l'échelle électrofaible} & (t \sim 10^{-11} \text{ sec.}) & |\Omega - 1| < \mathcal{O}(10^{-27}) \end{array}$$

On est donc confronté à un problème de réglage fin pour fixer les conditions initiales.

Problème des fossiles de l'univers primordial Les fossiles de l'univers primordial sont des particules prédites par les theories d'unification. Ces particules fossiles peuvent être des monopôles magnétiques, des murs de domaines, ou encore des cordes cosmiques. La densité d'énergie de ces particules devrait alors rapidement dominer la densité d'énergie de l'univers, ce qui n'est pas observé.

1.4.2 Réponse de l'inflation aux problèmes du modèle classique de Big Bang

L'inflation est un modèle proposé en 1981 (Guth 1981) pour résoudre les 3 problèmes ci-dessus. L'inflation consiste en une phase d'accélération de l'univers ($\ddot{a} > 0$), contrairement à ce qui se passe dans le reste de l'histoire de l'Univers, où $\ddot{a} < 0$ (sauf très récemment, où à nouveau l'Univers serait en accélération).

Problème de l'horizon Pendant cette phase d'accélération, la vitesse d'expansion de l'univers augmente beaucoup plus vite que le rayon de Hubble. Des zones qui se seraient trouvées déconnectées causalement dans le cas d'une évolution classique, se retrouvent maintenant à des échelles plus petites que le rayon de Hubble (voir figure 1.15). Ceci permet d'expliquer pourquoi la température du fond diffus est quasiment la même partout.

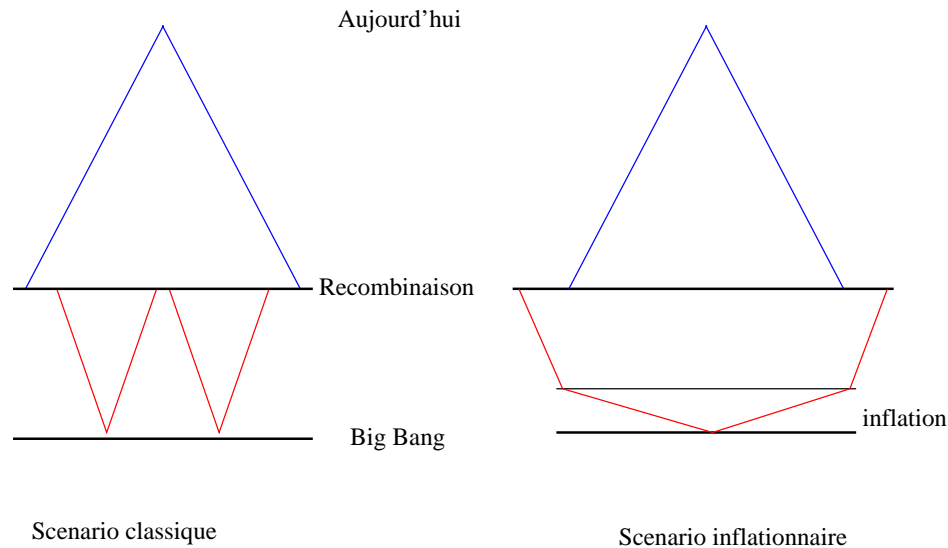


FIG. 1.15 – *Problème de l'horizon dans le scénario classique de Big Bang (à gauche) et résolution de ce problème par une phase d'inflation (à droite). **A gauche** : Dans le scénario classique, l'horizon causal (délimité par les traits rouges) est plus petit que la taille de l'univers observable actuellement. On explique alors mal l'uniformité de la température du fond diffus. **A droite** : Une phase d'inflation dilate les distances physiques, ce qui résout le problème de l'horizon*

Problème de la platitude Le modèle d'inflation prévoit une accélération de l'expansion de l'univers. Le terme $a^2 H^2$ augmente au lieu de diminuer, ce qui pousse Ω vers 1, d'après l'équation 1.42. Il suffit que l'inflation dure assez longtemps pour que Ω devienne proche de 1 et qu'ainsi, aujourd'hui, on observe $\Omega \sim 1$.

Problème des fossiles de l'univers primordial L'expansion de l'univers étant accélérée pendant la phase d'inflation, les particules fossiles sont diluées. Pour que cette dilution reste valable dans l'univers actuel, il faut que la densité d'énergie de l'univers soit convertie en matière ordinaire. Cette condition est réalisée si pendant cette phase de conversion, la température de l'univers ne redevient pas assez grande pour permettre une recréation de ces particules fossiles.

Exposé du modèle d'inflation Je viens de montrer rapidement qu'une phase accélérée d'expansion de l'Univers est à même de résoudre un certain nombre de problèmes cosmologiques. Cependant, il est nécessaire de savoir ce qui provoque cette accélération. Dans le scénario de l'inflation, ce sont des champs scalaires qui sont à l'origine de la phase d'inflation. Ces champs sont utilisés en physique des particules pour représenter des particules de spin zéro. La densité d'énergie et la pression d'un champ scalaire homogène sont données par (Lyth & Riotto 1999) :

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (1.43)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (1.44)$$

où le premier terme représente l'énergie cinétique, et le deuxième terme l'énergie potentielle. La conservation du tenseur énergie-impulsion donne :

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} = -V'(\phi), \quad (1.45)$$

et l'équation de Friedmann devient :

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\pi G \left[V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right]. \quad (1.46)$$

où $\pi G = 1/m_{Pl}^2$, m_{Pl} étant la masse de Planck. La condition nécessaire pour qu'il y ait inflation s'écrit alors :

$$\ddot{a} > 0 \iff \dot{\phi}^2 < V(\phi). \quad (1.47)$$

Cette condition est vérifiée dans l'approximation dite de "roulement lent" (Slow Roll Approximation en anglais, ou SRA), c'est à dire quand l'énergie potentielle domine la densité d'énergie. Les équations 1.45 et 1.46 se simplifient alors en :

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} V(\phi), \quad (1.48)$$

$$3H\dot{\phi} = -V'(\phi). \quad (1.49)$$

On définit alors les paramètres du “roulement lent” :

$$\epsilon(\phi) = \frac{m_{Pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 ; \quad \eta(\phi) = \frac{m_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V''}{V}. \quad (1.50)$$

$\epsilon \ll 1$ assure qu’il existe une période d’inflation, et $|\eta| \ll 1$ permet une phase d’inflation prolongée.

Dans les conditions de Slow Roll, et si l’on suppose que le spectre de puissance des fluctuations initiales est de la forme $P(k) \propto k^n$ on peut calculer l’indice spectral (Lyth & Riotto 1999) :

$$n - 1 = 6\epsilon - 2\eta. \quad (1.51)$$

La valeur de n prédite par les modèles d’inflation dans le cadre de l’approximation SRA est donc très proche de l’unité.

Fluctuations primordiales Les modèles décrivant la formation des structures 1.2.3 ou bien la formation des anisotropies du fond diffus supposent que l’Univers est très légèrement inhomogène. Le modèle inflationnaire propose un mécanisme permettant d’expliquer l’existence de ces inhomogénéités primordiales.

Les fluctuations quantiques du champ scalaire de l’inflation sont les sources de ces inhomogénéités primordiales. Ces fluctuations quantiques sont étirées sur des échelles plus grandes que le rayon de Hubble et vont produire des fluctuations macroscopiques de la métrique. Leur amplitude reste faible lors de l’inflation, mais lors du “réchauffement”, qui termine l’inflation, les particules créées à ce moment vont amplifier les fluctuations de la métrique. Ce mécanisme permet de relier les anisotropies primordiales avec les fluctuations du champ scalaire responsable de l’inflation, et donc d’expliquer l’origine du spectre de puissance primordial des fluctuations de densité. L’origine quantique de ces fluctuations impose qu’elles suivent une statistique gaussienne, ce qui implique que l’on peut décrire toute l’information sur les fluctuations de densité primordiales dans un spectre de puissance.

Bibliographie

- Allen C.W., Allen's astrophysical quantities fourth edition, Springer, 2000
- Balser, D. S., Rood, R. T., & Bania, T. M. 2001, American Astronomical Society Meeting, 198,
- Burles, S., Nollett, K.M., Turner, M. S., 2001, Astrophysical Journal, 552, L1
- Faure, C., Courbin, F., Kneib, J. P., Alloin, D., Bolzonella, M., Burud, I. 2002, Astronomy and Astrophysics, 386, 69
- Castillo-Morales, A. & Schindler, S. 2003, Astronomy and Astrophysics, 403, 433
- Chaboyer, B., Demarque, P., Kernan, P. J., & Krauss, L. M. 1998, Astrophysical Journal, 494, 96
- Chandrasekhar, S. 1931, Astrophysical Journal, 74, 81
- Colless, M. et al. 2001, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 328, 1039
- Croft, R. A. C., Weinberg, D. H., Katz, N., & Hernquist, L. 1998, Astrophysical Journal, 495, 44
- Dicke, R. H., Peebles, P. J. E., Roll, P. G., & Wilkinson, D. T. 1965, Astrophysical Journal, 142, 414
- Fixsen, D. J. & Mather, J. C. 2002, Astrophysical Journal, 581, 817
- Freedman, W. L. et al. 2001, Astrophysical Journal, 553, 47
- Gamow G., R.A Alpher, *et al*, 1948, Physical Review, 73, 803
- Guth, A. H. 1981, Physical Review D., 23, 347
- Henry, J. P. 2000, Astrophysical Journal, 534, 565
- Hubble, E. , Humason, M. L., 1931, Astrophysical Journal, 74, 43
- Izotov, Y. I. & Thuan, T. X. 1998, Astrophysical Journal, 500, 188
- Jenkins, A., et al. 1998, Astrophysical Journal, 499, 20
- Lyth, D.H., Riotto A., Physics Report, 314 (1999) pp.1-146
- Mellier, Y. 1999, Annual Review of Astron. and Astroph., 37, 127
- Molnar, S. M., Birkinshaw, M., & Mushotzky, R. F. 2002, Astrophysical Journal, 570, 1
- O'dell, C. R., Peimbert, M., & Kinman, T. D. 1964, Astrophysical Journal, 140, 119

- Olive, K. A., Steigman, G., & Walker, T. P. 2000, *Phys. Rep.*, 333, 389
- Peacock, S. D., *Cosmological physics*, Cambridge University Press, 1998
- Peebles P.J.E., *Principles of physical cosmology*, Princeton University Press, 1993
- Peimbert, M., Peimbert, A., & Ruiz, M. :. 2000, *Astrophysical Journal*, 541, 688
- Penzias, A. A. & Wilson, R. W. 1965, *Astrophysical Journal*, 142, 419
- Pettini, M. & Bowen, D. V. 2001, *Astrophysical Journal*, 560, 41
- Percival, W. J. et al. 2001, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 327, 1297
- Perlmutter, S. et al. 1999, *Astrophysical Journal*, 517, 565
- Press, W. H. & Schechter, P. 1974, *Astrophysical Journal*, 187, 425
- Refsdal, S., 1964 *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 128, p.307
- Rich J., *Fundamentals of cosmology*, Springer, 2001
- Riess, A. G. et al. 1998, *Astronomical Journal*, 116, 1009
- Schneider, P., van Waerbeke, L., Jain, B., & Kruse, G. 1998, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 296, 873
- Smoot, G. F. et al. 1992, *Astrophysical Journal*, 396, L1
- Suzuki, T. K., Yoshii, Y., & Beers, T. C. 2000, *Astrophysical Journal*, 540, 99
- Tegmark, M. & Zaldarriaga, M. 2002, *Physical Review D*, 66, 103508
- Tytler, D., O'Meara, J. M., Lubin, D., Suzuki, N., Burles, S., & Kirkman, D. 2000, *American Astronomical Society Meeting*, 196,
- Vangioni-Flam, E., Coc, A., & Cassé, M. 2000, *Astronomy et Astrophysics*, 360, 15
- Van Waerbeke, L. et al. 2001, *Astronomy and Astrophysics*, 374, 757

Chapitre 2

Fluctuations cosmologiques et spectre de puissance du fond diffus cosmologique

Dans le premier chapitre, j'ai décrit le modèle cosmologique qui constitue le cadre de référence de l'étude des fluctuations cosmologiques. Dans ce chapitre, dans un premier temps, je vais exposer les méthodes et les outils permettant de décrire les fluctuations cosmologiques. Je mettrai en avant le rôle de l'analyse de Fourier et, dans le cas des anisotropies du fond diffus, de leur projection sur les harmoniques sphériques. Je poursuivrai par une description de l'origine des anisotropies de température dans le fluide baryons-photons avant la recombinaison. Cette étude permettra d'expliquer qualitativement la forme du spectre de puissance C_ℓ des anisotropies de température (figure 2.1). Je montrerai aussi comment un modèle semi-analytique simple permet de comprendre la position des pics dans le spectre de puissance des anisotropies de température. Je montrerai ensuite comment la forme du spectre de puissance est altérée lorsque les paramètres cosmologiques varient, en me basant sur une description qualitative de la formation des anisotropies et sur un ensemble de courbes calculées avec le code CAMB¹.

¹<http://camb.info>

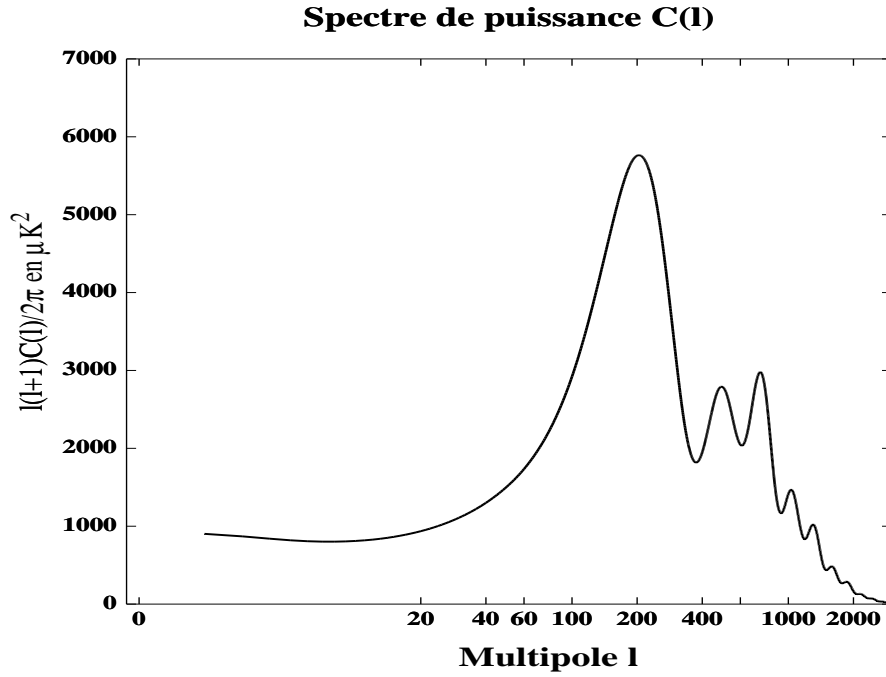


FIG. 2.1 – Exemple de spectre de puissance des anisotropies de température. Les paramètres cosmologiques utilisés sont les suivants : $\Omega_b = 0.044$, $\Omega_{CDM} = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Le spectre de puissance est présenté en échelle logarithmique.

2.1 Description des fluctuations cosmologiques et des anisotropies de température

2.1.1 Description des fluctuations cosmologiques

Les fluctuations de densité dans l'Univers sont décrites par leur contraste $\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$ où $\rho(\mathbf{x})$ représente la densité totale d'énergie (quelle que soit sa forme : matière, rayonnement ou "énergie noire") au point \mathbf{x} dans le cadre de la relativité générale. Pour étudier le spectre des fluctuations, c'est-à-dire le comportement de ces fluctuations en fonction de l'échelle, on décompose $\delta(\mathbf{x})$ en modes de Fourier (Longair 1998) :

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}, \quad (2.1)$$

$$\delta_k = \frac{1}{V} \int \delta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

Dans ces expressions, k est un nombre d'onde comobile, $k = 2\pi a(t)/\lambda(t)$ où $\lambda(t)$ est la longueur d'onde physique d'une perturbation harmonique. La relation de Parseval-Plancherel implique :

$$\frac{1}{V} \int \delta^2(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int |\delta_k|^2 d^3\mathbf{k},$$

où le membre de gauche de l'équation représente la valeur moyenne du carré du contraste de densité. En introduisant le spectre de puissance des inhomogénéités de densité $P(k) = |\delta_k|^2$, on obtient :

$$\langle \delta^2(x) \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} \int P(k) d^3\mathbf{k}. \quad (2.3)$$

Selon le principe cosmologique, l'Univers est isotrope, de sorte que l'élément de volume $d^3\mathbf{k}$ s'écrit $4\pi k^2 dk$, et donc :

$$\langle \delta^2(x) \rangle = \frac{V}{2\pi^2} \int P(k) k^3 \frac{dk}{k}. \quad (2.4)$$

Il s'ensuit que la fonction $\Delta_k^2 = \frac{V k^3 |\delta_k|^2}{2\pi^2}$ représente la contribution par unité de $\ln k$ à la variance du contraste de densité.

On peut aussi montrer (Rich 2001) que Δ_k^2 caractérise la variance des fluctuations de la masse M_R contenue dans une sphère de rayon $R \simeq 1/k$. Pour $R = 8 h^{-1} \text{Mpc}$, $\Delta_k^2 \simeq \left\langle \left(\frac{\Delta_{M_R}}{M_R} \right)^2 \right\rangle$ où Δ_{M_R} représente les inhomogénéités de masse dans une sphère de rayon R .

Quant au spectre de puissance $P(k)$ il est directement lié à la fonction d'autocorrélation :

$$\xi(\mathbf{x}) = \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}) \rangle \quad (2.5)$$

$$= \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta^*(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}) \rangle \quad (2.6)$$

En effet, il résulte de 2.1 que :

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int \delta_{k_1} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \delta_{k_2} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{x}_1, \quad (2.7)$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} \int P(k) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3\mathbf{k}. \quad (2.8)$$

$P(k)$ est donc la transformée de Fourier de $\xi(\mathbf{x})$.

En l'absence d'arguments physiques ou d'observations faisant intervenir une échelle particulière dans le spectre des fluctuations primordiales, on est amené à choisir pour $P(k)$ une puissance de k , soit :

$$P(k) \propto k^n.$$

Dans l'hypothèse où ces fluctuations ont pour origine des fluctuations quantiques du champ scalaire qui a provoqué l'inflation, Zel'dovich et indépendamment Harrison et Peebles ont montré que $n = 1$, soit $\Delta_k^2 \propto k^4$. Un tel spectre est appelé "spectre invariant d'échelle" pour la raison suivante : les fluctuations Ψ du potentiel gravitationnel Newtonien satisfont l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta, \quad (2.9)$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle, $\bar{\rho}$ est la moyenne de la densité de matière et δ la perturbation relative de cette densité ($\delta = \delta\rho/\rho$). Cette équation implique après transformation de Fourier :

$$\Psi_k = -4\pi G a^2 \bar{\rho} \frac{\delta_k}{k^2}.$$

Il s'ensuit que le spectre Δ_k^2 , proportionnel à $k^3|\delta\Psi_k|^2$ est indépendant de l'échelle k lorsque $|\delta_k|^2$ est en k . On montre par ailleurs (Rich 2001) que pour un tel spectre de puissance invariant d'échelle, lorsqu'un mode de Fourier des perturbations primordiales rentre à l'intérieur du rayon de Hubble ² son amplitude Δ_k est indépendante de l'échelle qui caractérise ce mode.

2.1.2 Description des anisotropies de température

Le signal des anisotropies de température est observé sur une sphère. On décompose donc ces anisotropies sur la base des harmoniques sphériques :

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell, m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (2.10)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire dans la direction (θ, ϕ) . $Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}})$ est l'harmonique sphérique définie par (Press 1988) :

$$Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) = Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.11)$$

et $P_{\ell}^m(x)$ est le polynôme de Legendre associé, qui se déduit des polynômes de Legendre P_{ℓ} par

$$P_{\ell}^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_{\ell}(x). \quad (2.12)$$

Les harmoniques sphériques satisfont la relation d'orthogonalité

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{-1} Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) Y_{\ell m}(\theta, \phi) d\phi d(\cos \theta) = \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m}. \quad (2.13)$$

Si l'on suppose que les conditions initiales sont gaussiennes (voir la dernière partie du chapitre 1), alors les $a_{\ell m}$ sont des variables aléatoires gaussiennes. Les propriétés statistiques de $\Delta T/T$ sont alors complètement caractérisées par la moyenne :

$$\langle a_{\ell m} \rangle = 0 \quad (2.14)$$

et le spectre de puissance $a_{\ell m}$:

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_{\ell} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}. \quad (2.15)$$

On peut calculer les coefficients $a_{\ell m}$ en inversant la formule 4.7 :

$$a_{\ell m} = \int \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) d\Omega, \quad (2.16)$$

où $d\Omega$ est l'angle solide élémentaire autour de la direction $\hat{\mathbf{n}}$.

²Cette date est définie par $\lambda_k = d_H = c/H$.

2.2 Anisotropies primaires

Comme on l'a vu dans le chapitre 1, nous observons aujourd'hui un univers qui est loin d'être homogène. La matière est regroupée en galaxies et en amas de galaxies. On comprend qualitativement comment de petites inhomogénéités de densité présentes dans l'Univers primordial ont pu, sous l'effet de la gravitation, à terme, générer les structures observées. Par ailleurs, l'inflation prédit que des fluctuations de densité existaient effectivement dans l'Univers primordial. Il nous reste donc à analyser l'évolution de ces inhomogénéités avant la recombinaison. La manière dont ces inhomogénéités se projettent sur le ciel aujourd'hui fera l'objet de la partie 2.2.3.

On observe aujourd'hui des anisotropies de température dans le rayonnement de fond diffus. Ces inhomogénéités de température se sont développées avant l'époque de la recombinaison, c'est-à-dire avant que les électrons ne soient liés aux noyaux des éléments légers. Les photons et les électrons étaient alors fortement couplés par la diffusion Thomson. Le libre parcours moyen des photons était égal à (Longair 1998)

$$\tau = 0.035 \frac{\Omega_b}{\Omega_{tot}} h z^{3/2},$$

où $h = H_0/(100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$. Pour des valeurs des paramètres cosmologiques égales aux valeurs les plus probables actuellement, et pour $z \simeq 1000$ (valeur correspondant à une époque précédant de peu la recombinaison), l'Univers était totalement opaque au rayonnement, ce qui signifie aussi que les photons et les baryons étaient fortement couplés entre eux. La température des photons était alors la même que celle des électrons. Par ailleurs, la température du fond diffus décroît comme $1 + z$ (voir chapitre 1), alors que la densité de matière décroît en $(1 + z)^{-3}$. On a alors pour la densité des baryons n_b :

$$n_b \propto T^3.$$

Ceci implique que $\delta_b(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta n_b(\mathbf{x}, t)}{\bar{n}_b}$ est relié à $\Theta(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta T(\mathbf{x}, t)}{T}$ par

$$\Theta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{3} \delta_b(\mathbf{x}, t). \quad (2.17)$$

Pour décrire qualitativement les inhomogénéités de température, on doit distinguer celles dont l'échelle est plus grande que l'horizon à l'époque de la recombinaison de celles dont l'échelle est plus petite que l'horizon.

2.2.1 Echelles plus grandes que l'horizon à la recombinaison

L'évolution des perturbations du fluide de baryons-photons dont l'échelle est supérieure à la taille de l'horizon ($\lambda > c\tau$ où τ est le temps conforme) obéit à une dynamique particulière du fait que les interactions ne peuvent pas se propager sur de grandes distances en un temps fini. Nous admettrons que le seul effet à prendre en compte à ces échelles est le décalage spectral

des photons qui doivent s'échapper des puits du potentiel gravitationnel. Cet effet est appelé effet "Sachs-Wolfe" (Sachs & Wolfe 1967).

Pour calculer cet effet, l'impact des fluctuations de densité sur la métrique sera décrit dans un système de coordonnées Newtonien. Dans un tel système, la métrique est diagonale, les perturbations de la courbure spatiale sont décrites par $\delta g_{ij} = 2a^2 \Phi_{ij}$ (où $a(\tau)$ est le facteur d'échelle de la métrique et ϕ le champ gravitationnel) et le potentiel Newtonien, noté Ψ , figure dans la perturbation du terme temps-temps de cette métrique : $\delta g_{tt} = 2\Psi$. Les perturbations de la métrique satisfont la relation approchée $\Psi \simeq -\Phi$.

L'effet Sachs-Wolfe qui domine le spectre de puissance des fluctuations aux grandes échelles angulaires est la combinaison de deux décalages :

- si la dernière diffusion des photons du CMB prend place dans une région où la perturbation du potentiel gravitationnel vaut Ψ , la sortie de ce potentiel entraîne un décalage de fréquence qui, traduit en terme de température, vaut $\frac{\delta T}{T} = \Psi$ (dans une région d'émission surdense, $\Psi < 0$, le décalage spectral est vers le rouge et $\delta T < 0$).
- dans un système de coordonnées Newtonien, la date de la dernière diffusion dépend de Ψ , selon $\frac{\delta t}{t} = \Psi$: la date d'émission est plus précoce dans une région surdense ($\Psi < 0$) et l'Univers est alors relativement plus chaud qu'en moyenne dans un tel domaine. Sachant que $a(t) \propto t^{2/3}$ (pendant la période dominée par la matière), on a :

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{2}{3} \frac{\delta t}{t} = \frac{2}{3} \Psi.$$

Par ailleurs $T \propto a^{-1}$, donc $\frac{\delta T}{T} = -\frac{2}{3} \Psi$.

Au total, l'effet Sachs-Wolfe est donc donné par

$$\frac{\Delta T}{T} = \Psi - \frac{2}{3} \Psi = \frac{1}{3} \Psi. \quad (2.18)$$

On peut alors montrer (Longair 1998) que pour un spectre initial de fluctuations du type $P(k) \propto k^n$, on obtient :

$$\frac{\Delta T}{T} \propto \theta^{(1-n)/2}, \quad (2.19)$$

où θ est la taille angulaire de la perturbation. Pour un spectre de Harrison-Zel'dovich, on obtient une amplitude des fluctuations de température indépendante de l'échelle. Plus formellement, on peut calculer le spectre de puissance angulaire C_ℓ des anisotropies (White, Scott, & Silk 1994). On obtient alors

$$C_\ell \propto \frac{\Gamma(3-n)}{\Gamma^2(\frac{4-n}{2})} \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2})}{\Gamma(\ell + \frac{5-n}{2})}, \quad (2.20)$$

où $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ ce qui donne, pour un spectre de Harrison-Zel'dovich

$$C_\ell \propto \frac{1}{\ell(\ell+1)}. \quad (2.21)$$

La relation 2.21 explique la forme de plateau à bas ℓ du spectre de puissance de la figure 2.1 lorsque l'on représente $\ell(\ell+1)C_\ell$. C'est la traduction en termes d'anisotropies de température du caractère invariant d'échelle du spectre de Harrison-Zel'dovich.

2.2.2 Petites échelles angulaires et pics acoustiques

Cette description est essentiellement basée sur le travail de W. Hu, résumé dans (Hu & Dodelson 2002). Pour les échelles plus petites que la taille de l'horizon au moment du découplage, la dynamique du fluide baryons-photons doit être prise en compte dans le calcul de l'évolution des inhomogénéités. Comme les perturbations considérées restent petites, les équations d'évolutions sont linéaires, et il est naturel de les décomposer en modes de Fourier, qui de ce fait, évoluent indépendamment les uns des autres :

$$\Theta(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Theta(\mathbf{k}, t). \quad (2.22)$$

Compte tenu de l'absence de direction privilégiée, tous les $\Theta(\mathbf{k})$ pour un $k = ||\mathbf{k}||$ donné obéissent aux mêmes équations. Dans la suite, $\Theta(\mathbf{k}) = \Theta$, je ne préciserai la variable que lorsque nous étudierons les perturbations dans l'espace direct. Les densités d'énergie, sous forme de matière d'une part, et sous forme de rayonnement d'autre part, deviennent comparables au moment de l'équivalence matière-radiation. Des oscillations acoustiques apparaissent alors dans le fluide baryons-photons. Lorsque l'échelle d'un mode k est plus petite que l'horizon, celui-ci est soumis à la concurrence de la gravitation, qui tend à comprimer le fluide, et de la pression de radiation, qui a tendance à le diluer. $\Theta(\mathbf{k}, t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ représente une telle onde acoustique stationnaire dont l'amplitude $\Theta(\mathbf{k})$ dépend du temps. Nous allons préciser cette dépendance dans les paragraphes suivants.

Potentiel gravitationnel Nous nous limiterons ici à une approche Newtonienne. Les perturbations $\Psi(\mathbf{x}, t)$ du potentiel gravitationnel newtonien satisfont l'équation de Poisson 2.9. On peut considérer que la matière noire domine la densité de matière. Cette équation montre que les perturbations du potentiel ont pour source uniquement des inhomogénéités de densité de la matière noire. On montre que celles-ci évoluent selon l'équation suivante :

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}\delta = 0. \quad (2.23)$$

Quand l'Univers est dominé par le rayonnement, le terme $4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta$ est négligeable et, étant donné que $a(t) \propto t^{1/2}$ lorsque le rayonnement domine, les solutions de cette équation sont soit $\delta = \text{constante}$, soit $\delta \propto \ln t$. Or l'équation de Poisson 2.9 implique $\Psi \propto \delta/a$ puisque $\bar{\rho} \propto a^{-3}$ pour de la matière non relativiste (cas d'une approche Newtonienne). Il en résulte que l'amplitude $|\Psi|$ des perturbations du potentiel gravitationnel décroît au cours du temps.

Par contre, lorsque l'Univers est dominé par la matière, et qu'alors $a(t) \propto t^{2/3}$ la solution croissante (donc celle qui importe à long terme) de l'équation 2.23 est $\delta \propto t^{2/3} \propto a$. Les perturbations du potentiel gravitationnel Ψ sont alors constantes au cours du temps.

Oscillations acoustiques du fluide L'évolution des perturbations du fluide résulte d'une équation de continuité (conservation de la masse) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho + p) \mathbf{v} = -\frac{4}{3}\rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (2.24)$$

où p est la pression du fluide et \mathbf{v} est la vitesse de ce fluide, et de l'équation d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) :

$$(\rho + p) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p - (\rho + p) \nabla \Psi \quad (2.25)$$

en négligeant dans un premier temps l'effet de la gravitation et des baryons, ainsi que le couplage imparfait entre les 2 composantes du fluide (Hu & Dodelson 2002). Ces deux équations sont des équations relativistes et généralisent les équations de continuité et d'Euler de la mécanique des fluides classique (Weinberg 1972). L'équation de continuité appliquée aux photons se traduit, pour ce qui est des fluctuations de température $\Theta(\mathbf{x}, t)$, par la relation

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}k v_\gamma. \quad (2.26)$$

Dans cette équation, Θ représente l'un des modes de Fourier définis par l'équation 2.22, k est son nombre d'onde. Ce dernier apparaît du fait que l'on doit prendre le gradient de $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$. La dérivée de Θ est prise par rapport au temps conforme $\eta = \int \frac{dt}{a(t)}$, car l'équation 2.26 prend en compte l'expansion de l'Univers. Le terme v_γ est la projection de la vitesse des photons sur la direction du vecteur d'onde \mathbf{k} . Le facteur $\frac{1}{3}$ vient du fait que $n_\gamma \propto T^3$, et donc $\delta T/T \propto 1/3 \delta n_\gamma / n_\gamma$.

Quant à l'équation d'Euler, elle implique :

$$\dot{v}_\gamma = k\Theta. \quad (2.27)$$

En effet, la densité d'impulsion dans un fluide de photons est $(\rho_\gamma + p_\gamma)v_\gamma$, soit $\frac{4}{3}\rho_\gamma v_\gamma$ compte tenu de la relation $p_\gamma = \rho_\gamma/3$ dans un tel fluide. Le terme de pression vaut $\nabla p = \nabla(\rho_\gamma/3) = \frac{4}{3}k\Theta\rho_\gamma$, cette dernière égalité venant de la relation $\rho_\gamma \propto T^4$ pour le rayonnement de corps noir, impliquant $\delta\rho_\gamma = 4\rho_\gamma\Theta$.

En combinant ces deux équations, on obtient une équation classique d'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\Theta} + c_s^2 k^2 \Theta = 0, \quad (2.28)$$

où $c_s = 1/\sqrt{3}$ est la vitesse du son dans le fluide parfait. Cette équation régit la variation dans le temps d'un mode d'oscillation dont le nombre d'onde est k . Ces oscillations entraînent des chauffages et des refroidissements du fluide qui se comprime ou se raréfie selon des modes stationnaires, étant donné la nature stationnaire des modes de Fourier utilisés pour analyser les fluctuations. Si l'on admet qu'initialement non seulement Θ est nulle, mais aussi sa dérivée, les oscillations des coefficients Θ sont décrites par

$$\Theta(k, \eta) = \Theta(0) \cos(ks), \quad (2.29)$$

où $s = \int c_s d\eta \simeq \eta/\sqrt{3}$ est l'horizon sonique, c'est-à-dire la distance que le son parcourt pendant le temps η . On a supposé ici que tous les modes de Fourier avaient la même phase initiale. C'est vrai dans le cas du modèle d'inflation où cette égalité des phases résulte du fait que les perturbations primordiales sont générées toutes à la même époque indépendamment de leur échelle.

Ces oscillations durent jusqu'à la recombinaison. Les modes k dont la valeur absolue de l'amplitude Θ est maximum au moment de la recombinaison produisent les pics dans le spectre de puissance. Ces pics correspondent à une série harmonique suivant la relation

$$k_n = \frac{n\pi}{s_*} \quad (2.30)$$

avec n entier (voir figure 2.2) et où $s_* \simeq \eta_*/\sqrt{3}$ est l'horizon sonique à la recombinaison.

La relation entre cette série de pics dans le spectre de puissance de $\Theta(k, \eta_*)$ et les pics acoustiques présents dans la courbe de C_ℓ sera étudiée plus loin (partie 2.2.3).

Effet du potentiel gravitationnel Nous avons négligé dans ce premier modèle l'effet de la gravitation et des baryons, que nous allons prendre en compte en deux étapes. La présence d'un potentiel gravitationnel Newtonien dû à la matière noire rajoute un terme à l'équation d'Euler 2.27 :

$$\dot{v}_\gamma = k\Theta + k\Psi. \quad (2.31)$$

Dans cette équation, Ψ représente l'amplitude d'un mode de Fourier k dans la décomposition de $\Psi(\mathbf{x}, t)$ et le facteur k provient du fait que la force qui résulte du potentiel est égale à $-\nabla\Psi$. Par ailleurs, la perturbation Φ liée à la courbure spatiale dans la métrique Newtonienne affecte le facteur d'échelle local, ce qui provoque un décalage de longueur d'onde de sorte que l'équation de continuité 2.26 doit être réécrite :

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}k v_\gamma - \dot{\Phi}. \quad (2.32)$$

L'équation de l'oscillateur devient alors :

$$\ddot{\Theta} + c_s^2 k^2 \Theta = -\frac{k^2}{3} \Psi - \ddot{\Phi}. \quad (2.33)$$

On néglige le terme $\ddot{\Phi}$ qui est nul dans le cas limite d'un univers plat et sans pression. En l'absence de baryons, $c_s^2 = 1/3$ et donc cette équation est la même que l'équation 2.28 moyennant le remplacement de Θ par $\Theta + \Psi$. La solution dans un univers dominé par la matière est alors :

$$[\Theta + \Psi](k, \eta) = [\Theta + \Psi](\eta_{eq}) \cos(ks), \quad (2.34)$$

où η_{eq} dénote la valeur prise au moment de l'équivalence matière-radiation. On a vu plus haut que la variation de température Θ induite par le potentiel

Oscillations et pics acoustiques

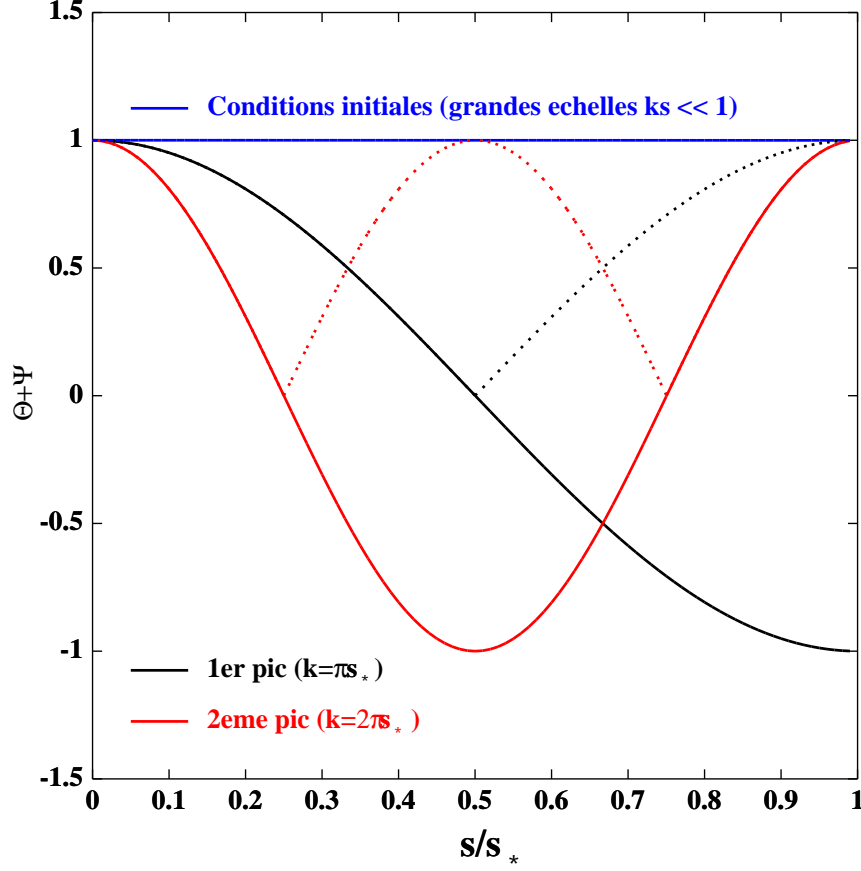


FIG. 2.2 – *Oscillations acoustiques dans le fluide baryons-photons, en négligeant l'effet d'inertie des baryons. On peut voir sur la figure trois modes différents de la température effective $[\Theta + \Psi]$. En bleu, un mode de très grande longueur d'onde, qui n'est pas affecté par les oscillations (effet Sachs-Wolfe). En noir, un mode qui a juste le temps d'effectuer une demi-période d'oscillation. Ce mode se trouve donc gelé dans une phase de compression de la matière dans les puits de potentiel. Il est à l'origine du premier pic dans le spectre de C_ℓ . En rouge, le mode qui a eu le temps d'osciller pendant une période complète. Il est gelé dans l'état final qui est un état de raréfaction dans les puits de potentiel. Les courbes en pointillé représentent la contribution au spectre de puissance de chaque mode. La température effective $[\Theta + \Psi]$ est exprimée en unités réduites $[\Theta + \Psi]/[\Psi(\eta_{eq})/3]$*

gravitationnel Ψ vaut $-\frac{2}{3}\Psi$. On a donc $\Theta(\eta_{eq}) = -\frac{2}{3}\Psi(\eta_{eq})$ de sorte que l'équation 2.34 peut être réécrite

$$[\Theta + \Psi](k, \eta) = \frac{1}{3}\Psi(\eta_{eq}) \cos(ks). \quad (2.35)$$

La présence de cette quantité $\Theta + \Psi$ s'interprète aisément : lors de la recombinaison, les photons doivent s'échapper des puits du potentiel gravitationnel, ce qui induit un redshift gravitationnel égal à Ψ . La température effective $\Theta + \Psi$ est donc celle qui est observée.

La gravitation tend à comprimer le fluide de baryon-photon dans les puits, ce qui entraîne une élévation de sa température, puis la pression devient importante, ce qui provoque un mouvement en sens inverse et une raréfaction (refroidissement). Le premier pic acoustique correspond au mode qui est gelé dans sa première compression au moment de la recombinaison. Le second pic correspond au mode qui a eu le temps d'effectuer un demi-cycle compression/raréfaction (chauffage/refroidissement).

Effet des baryons Il est maintenant possible d'inclure l'effet des baryons sur les oscillations. La présence des baryons augmente l'inertie du fluide dans l'équation d'Euler. Le paramètre caractérisant cette augmentation est $R = \frac{p_b + p_\gamma}{\rho_\gamma + p_\gamma}$ où $p_b \approx 0$ est la contribution des baryons (non relativistes) à la pression et $p_\gamma = \rho_\gamma/3$ est celle des photons. Compte tenu de cet accroissement de l'inertie, la valeur de la vitesse du son est $c_s = 1/\sqrt{3(1+R)}$ où $R \approx 3\rho_b/4\rho_{rad}$. L'équation de l'oscillateur devient alors :

$$c_s^2 \frac{d}{d\eta} (c_s^{-2} \dot{\Theta}) + c_s^2 k^2 \Theta = -\frac{k^2}{3} \Psi - c_s^2 \frac{d}{d\eta} (c_s^{-2} \dot{\Phi}). \quad (2.36)$$

Pour estimer l'influence des baryons, faisons l'hypothèse que le rapport R et les potentiels Φ et Ψ ne varient pas dans le temps, et donc que la vitesse c_s est elle aussi constante. Dans ce cas l'équation 2.36 peut être réécrite sous la forme

$$\frac{d^2}{d\eta^2} (\Theta + (1+R)\Psi) + c_s^2 k^2 (\Theta + (1+R)\Psi) = 0 \quad (2.37)$$

Cette équation ayant la même forme que l'équation 2.28 avec $\Theta \rightarrow \Theta + (1+R)\Psi$, sa solution est :

$$[\Theta + (1+R)\Psi](k, \eta) = [\Theta + (1+R)\Psi](\eta_{eq}) \cos(ks). \quad (2.38)$$

L'effet de la présence des baryons est donc d'accroître l'amplitude des oscillations et de modifier la valeur moyenne de la température effective qui passe de la valeur 0 en absence de baryons à $-R\Psi$ en leur présence (voir figure 2.3). Ceci a pour conséquence de briser la symétrie des oscillations : les pics acoustiques impairs $n = 1, 3, 5, \dots$ sont amplifiés et les pics pairs $n = 2, 4, 6, \dots$ sont réduits.

Effet de la décroissance du potentiel gravitationnel Lorsque l'Univers est dominé par le rayonnement, le potentiel gravitationnel Newtonien Ψ décroît. Si un mode k , en particulier l'un de ceux de plus petite longueur d'onde, entre dans l'horizon avant l'équivalence matière-radiation, il commence à osciller du fait des inhomogénéités du potentiel gravitationnel Ψ qui résultent principalement des fluctuations de densité du fluide baryons-photons lui-même. Lorsque la surpression ralentit puis arrête la première

Oscillations et pics acoustiques (effets des baryons)

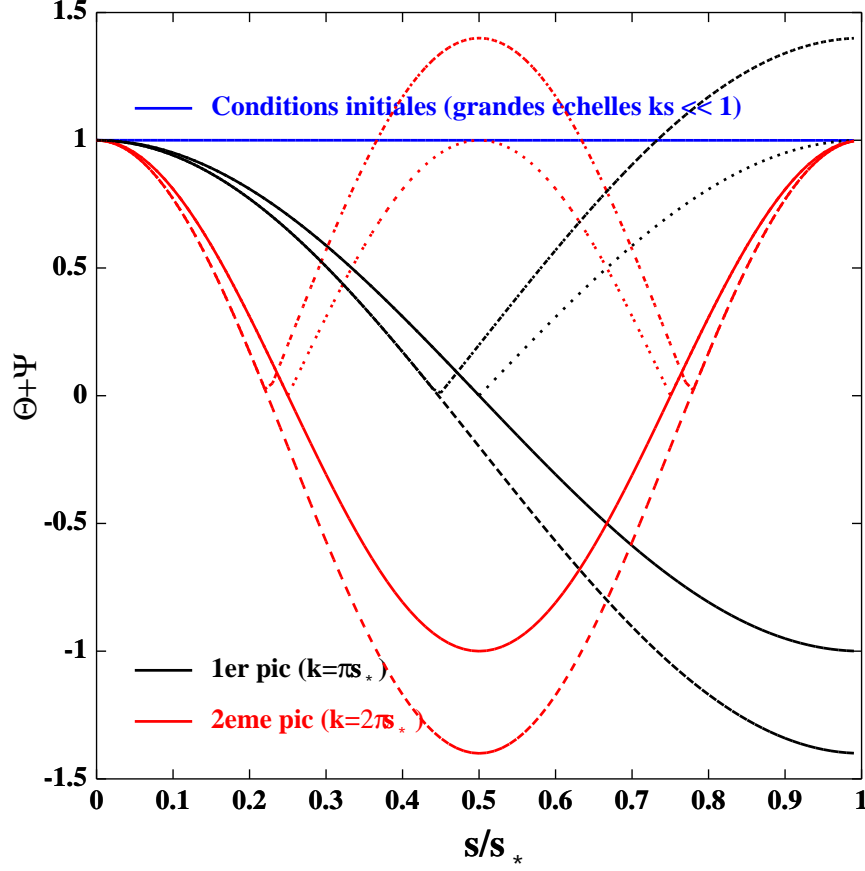


FIG. 2.3 – *Effet de la présence des baryons sur les oscillations de la température effective $[\Theta + \Psi]$. Les courbes en tireté représentent des situations où l'effet de la densité de baryons est pris en compte. L'amplitude des oscillations est augmentée, et la valeur moyenne n'est plus nulle. Ceci brise la symétrie entre les pics pairs et impairs. On voit que l'amplitude du premier pic (courbe noire) est augmentée par la présence des baryons par rapport à celle du deuxième pic (courbe rouge). La température effective $[\Theta + \Psi]$ est exprimée en unités réduites $[\Theta + \Psi]/[\Psi(\eta_{eq})/3]$*

compression, le potentiel Ψ diminue. L'expansion du fluide qui prend place ensuite n'a plus à "remonter" le potentiel présent initialement. Il s'ensuit que l'amplitude de cette oscillation est accrue d'un facteur qui peut atteindre 4 ou 5, compte tenu aussi de la décroissance des perturbations de la courbure Φ .

Dans le cas d'un puits de potentiel ($\Psi < 0, \Theta > 0$), la décroissance de $|\Psi|$ induit une augmentation de Ψ , et donc une augmentation de l'amplitude $|\Theta + \Psi|$ de la perturbation, ce qui provoque une augmentation de la puissance pour les échelles k concernées. De même dans le cas d'un maximum du potentiel gravitationnel ($\Psi > 0, \Theta < 0$), on observe une diminution de Ψ ,

donc une diminution de $\Theta + \Psi$ et une augmentation de l'amplitude $|\Theta + \Psi|$ (voir figure 2.4). Toute la partie du spectre qui rentre dans l'horizon avant ou autour de l'équivalence matière-radiation est concernée par cette augmentation de puissance.

Amplification des oscillations due a une baisse du potentiel

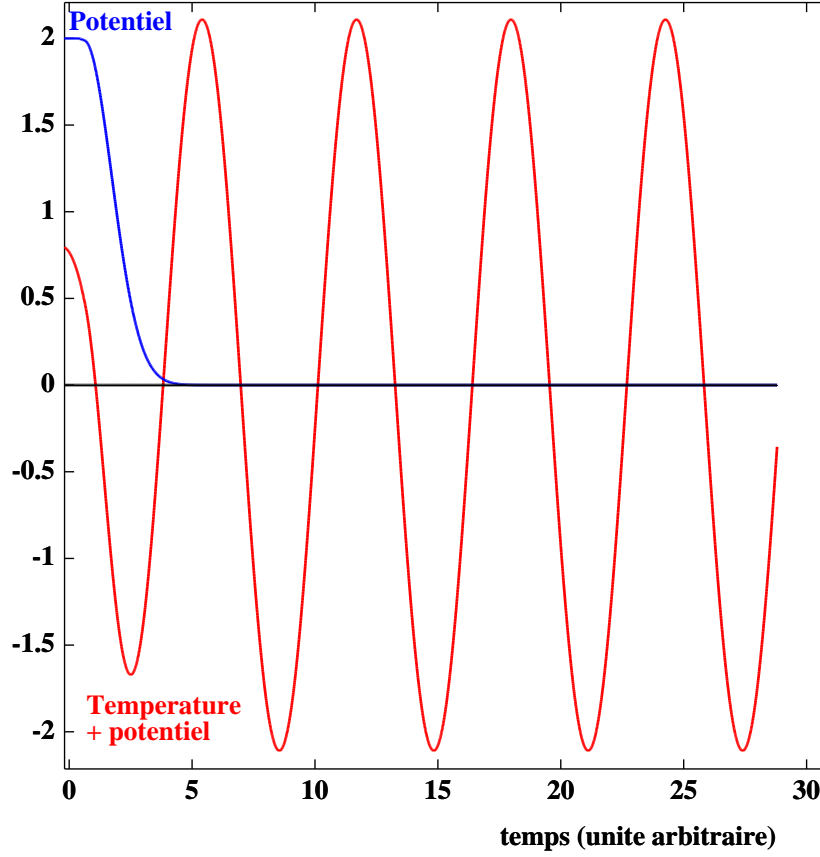


FIG. 2.4 – *Effet de la variation du potentiel gravitationnel pendant l'époque dominée par le rayonnement. Pendant cette époque, l'amplitude du potentiel gravitationnel décroît, ce qui augmente l'amplitude des oscillations acoustiques. Après l'équivalence, le fluide oscille dans les puits de potentiels gravitationnels jusqu'à la recombinaison.*

Amortissement des ondes acoustiques La diffusion Thomson des photons sur les électrons assure un couplage entre les photons d'une part et les baryons d'autre part, qui est imparfait du fait que les photons parcourent une certaine distance entre 2 interactions, avec un libre parcours moyen

$$\lambda_{th} = \frac{1}{x_e n_e \sigma_{th}}$$

où n_e est la densité d'électrons et x_e la fraction de ceux qui sont libres et σ_{th} la section efficace de diffusion Thomson. Ce parcours leur permet d'explorer des régions de température différentes. Comme cette diffusion s'accompagne de transfert de quantité de mouvement entre les deux fluides, le couplage imparfait entraîne un effet de viscosité qui tend à amortir les oscillations acoustiques. Il est tout particulièrement important à l'époque proche du découplage et pendant le découplage.

Pour le prendre en compte, il faut analyser séparément la dynamique des photons et celle des baryons.

En ce qui concerne les nombres de particules, chacun est évidemment conservé séparément, et on a donc (cf. équation 2.26)

$$3\dot{\Theta} = -kv_\gamma - 3\dot{\phi} \quad , \quad \dot{\delta}_b = -kv_b - 3\dot{\phi}, \quad (2.39)$$

où δ_b représente les inhomogénéités de densité en nombre des baryons et v_b la vitesse de ces derniers. Les termes $-3\dot{\phi}$ qui figurent dans ces équations proviennent des perturbations de la courbure ($\delta g_{ij} = 2a^2\phi_{ij}$ dans la jauge de Newton) qui affectent le facteur d'échelle local.

Le couplage imparfait entre photons et baryons fait que leurs vitesses locales ne sont pas nécessairement égales. Les équations d'Euler relatives à chacun de ces deux fluides s'écrivent alors, pour les photons

$$v_\gamma = k(\Theta + \Psi) - \frac{k}{6}\pi_\gamma - x_en_e\sigma_{th}a(v_\gamma - v_b), \quad (2.40)$$

et pour les baryons

$$\dot{v}_b = -\frac{\dot{a}}{a}v_b + k\Psi + x_en_e\sigma_{th}a(v_\gamma - v_b)/R. \quad (2.41)$$

Le terme $-\frac{\dot{a}}{a}v_b$ résulte de la diminution de l'impulsion des baryons due à l'expansion de l'Univers. Le terme $-\frac{k}{6}\pi_\gamma$ dans l'équation relative aux photons (2.40) est aussi un terme de viscosité dont l'origine se trouve dans le moment quadrupolaire $\Theta_{2m}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{n} Y_{2m}^* \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ des fluctuations spatiales de température. On peut montrer (Hu & Dodelson 2002) que

$$\pi_\gamma = \frac{32}{15} \frac{kv_\gamma}{n_e\sigma_{th}a}.$$

En combinant les équations 2.40 et 2.41, on est amené à réécrire l'équation 2.36 qui régit l'évolution des coefficients de Fourier des perturbations de température sous la forme

$$c_s^2 \frac{d}{d\eta} (c_s^{-2} \dot{\Theta}) + \frac{c_s^2 k^2}{x_e n_e \sigma_{th} a} \left(\frac{16}{15} + \frac{R^2}{1+R} \right) \dot{\Theta} + c_s^2 k^2 \Theta = -\frac{k^2}{3} \Psi - c_s^2 \frac{d}{d\eta} (c_s^{-2} \dot{\Phi}). \quad (2.42)$$

Cette dernière équation diffère de 2.36 par un terme supplémentaire en $\dot{\Theta}$. C'est donc bien un terme d'amortissement.

Celui-ci est proportionnel au libre parcours moyen des photons et inversement proportionnel au carré de la longueur d'onde de la perturbation. Il affecte donc plus particulièrement les petites échelles, c'est-à-dire la partie à grand ℓ du spectre de puissance des anisotropies de température (Silk 1968).

Nous avons fait le tour des effets qui rentrent en jeu dans la physique des oscillations acoustiques à l'origine des fluctuations de température. Nous présentons brièvement dans la suite les effets de projection qui doivent être pris en compte pour le calcul des anisotropies de température du fond diffus.

2.2.3 Effet de projection

Les variations locales de température $\Theta(\mathbf{x})$ ont été analysées plus haut après transformation de Fourier selon l'équation 2.22 et nous avons vu comment les coefficients $\Theta(\mathbf{k})$ évoluent en fonction du temps conforme η . Par ailleurs nous savons que dans la jauge de Newton la température du CMB qui est observée n'est pas Θ mais la température effective $\Theta + \Psi$.

Lorsqu'on mesure aujourd'hui ($\eta = \eta_0$) la perturbation de la température du CMB $\Theta_m(\hat{\mathbf{n}})$ dans une direction $\hat{\mathbf{n}}$, on mesure l'écart par rapport à la moyenne du rayonnement qui a subi sa dernière diffusion à la date η_* dans le domaine situé en $\mathbf{x} = D_*\hat{\mathbf{n}}$ ($D_* = \eta_0 - \eta_*$ est la distance qui nous sépare de la surface de dernière diffusion) après que le rayonnement se soit propagé jusqu'à nous.

Nous pouvons donc écrire :

$$\Theta_m(\hat{\mathbf{n}}) = [\Theta + \Psi](\mathbf{x} = D_*\hat{\mathbf{n}}, \eta_*) = \int d^3\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{n}}D_*} [\Theta + \Psi](\mathbf{k}, \eta_*). \quad (2.43)$$

L'exponentielle qui figure dans l'intégrale peut être développée en utilisant la relation suivante (valable pour un univers spatialement plat) :

$$e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{\ell m} (-i)^\ell j_\ell(kx) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (2.44)$$

où j_ℓ est la fonction de Bessel du premier ordre. Dans un univers qui présente une courbure spatiale, il faut remplacer la fonction j_ℓ par une fonction ultrasphérique de Bessel ((Zaldarriaga, Seljak, & Bertschinger 1998), (Abbott & Schaefer 1986)).

L'équation 2.44 permet de passer de coordonnées cartésiennes à des coordonnées sphériques. En l'appliquant à l'expression de $\Theta_m(\hat{\mathbf{n}})$ on obtient :

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell m} \left[4\pi (-i)^\ell \int d^3\mathbf{k} j_\ell(kD_*) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) [\Theta + \Psi](\mathbf{k}, \eta_*) \right] Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}). \quad (2.45)$$

La comparaison des équations 4.7 et 2.45 conduit à

$$a_{\ell, m} = 4\pi (-i)^\ell \int d^3\mathbf{k} [\Theta + \Psi](\mathbf{k}, \eta_*) j_\ell(kD_*) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}). \quad (2.46)$$

Il s'ensuit que

$$a_{\ell, m} a_{\ell, m}^* = 16\pi^2 \int d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 [\Theta + \Psi](\mathbf{k}_1, \eta_*) [\Theta + \Psi]^*(\mathbf{k}_2, \eta_*) j_\ell(k_1 D_*) j_\ell(k_2 D_*)^* Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}_1) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}_2). \quad (2.47)$$

Pour calculer le spectre de puissance angulaire C_ℓ des inhomogénéités de température, il faut calculer la moyenne de $|a_{\ell, m}|^2$ sur un ensemble de

réalisations d'univers. Cette moyenne fait apparaître la fonction suivante d'autocorrélation dans l'espace de Fourier :

$$\langle [\Theta + \Psi](\mathbf{k}_1, \eta_*) [\Theta + \Psi]^*(\mathbf{k}_2, \eta_*) \rangle = P(k) \delta^3(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \quad (2.48)$$

où $P_i(k)$ est le spectre de puissance initial. En prenant de plus la moyenne sur m , il vient :

$$C_\ell = \sum_m \frac{16\pi^2}{2\ell + 1} \int k^2 dk d\Omega P(k) j_\ell^2(kD_*) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}), \quad (2.49)$$

Et compte tenu de la relation

$$\sum_m Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{2\ell + 1}{4\pi}, \quad (2.50)$$

on obtient :

$$C_\ell = 16\pi^2 \int dk k^2 P(k) j_\ell^2(kD_*). \quad (2.51)$$

Des expressions de C_ℓ analogues à cette dernière, mais complètes, peuvent être trouvées dans (Seljak 1996) et (Ma & Bertschinger 1995). Comme on peut le voir sur la figure 2.5, la fonction $j_\ell(kx)$ est maximum autour de $kx = \ell$. Le mode k du spectre $P(k)$ a donc tendance à contribuer majoritairement à un multipole ℓ donné.

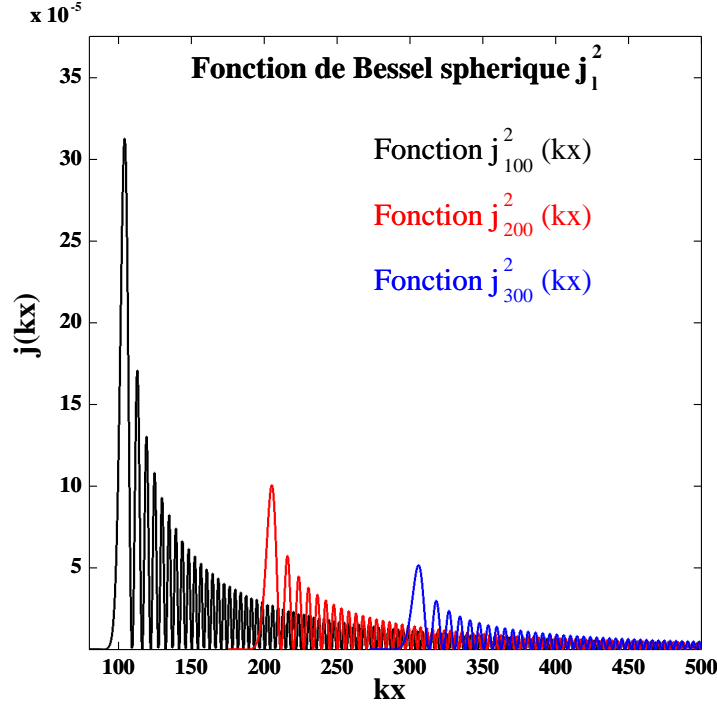


FIG. 2.5 – *Fonctions de Bessel sphériques $j_\ell(kx)$. La fonction $j_\ell(kx)$ est très piquée autour de $l \simeq kx$ ce qui explique qu'un mode k ne contribue essentiellement qu'à quelques multipoles ℓ . On a représenté sur la figure les fonctions de Bessel sphériques pour $\ell = 100, 200, 300$ qui sont maximum autour de $kx = 100, 200, 300$ respectivement.*

Cette analyse des caractéristiques les plus importantes du spectre de puissance angulaire C_ℓ des anisotropies de température nous permet de compléter la figure 2.1, comme l'illustre la figure 2.6

Nous pouvons maintenant étudier les anisotropies dites secondaires qui se superposent aux anisotropies primaires lors de la propagation des photons de la surface de dernière diffusion jusqu'à la surface $z = 0$.

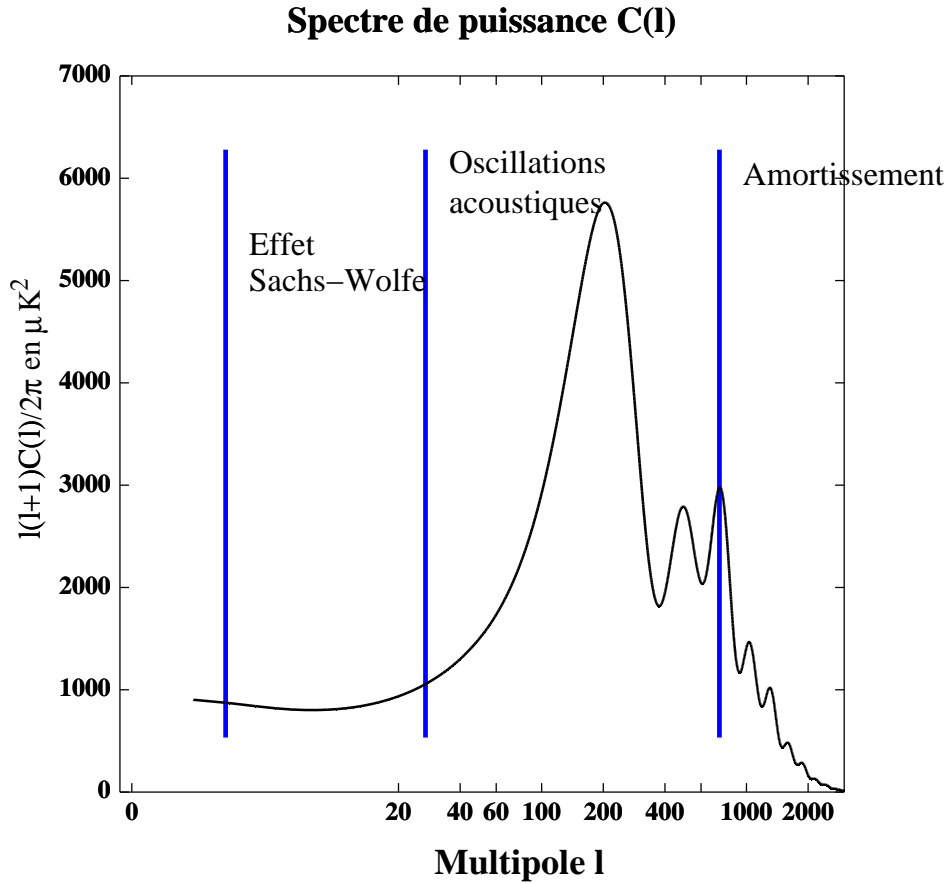


FIG. 2.6 – *Spectre de puissance des anisotropies de température. Les paramètres cosmologiques utilisés sont les suivants : $\Omega_b = 0.044$, $\Omega_{CDM} = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Le spectre de puissance est présenté en échelle logarithmique. On y a rajouté les domaines dans lesquels chaque effet décrit dans la partie concernant les anisotropies est dominant (Effet Sachs-Wolfe, oscillations acoustiques et amortissement).*

2.3 Les anisotropies secondaires

2.3.1 L'effet Sachs-Wolfe intégré

Nous avons vu dans la section précédente que l'existence de puits dans le potentiel gravitationnel au moment de la recombinaison provoque un décalage spectral. Le même effet peut prendre place lorsqu'un photon se propage entre la surface de dernière diffusion jusqu'à nous ($z = 0$). Cependant, sur ces échelles de temps, le potentiel gravitationnel peut varier le long de la trajectoire du photon. Le décalage spectral subi par le photon lorsqu'il rentre dans un puits (le raisonnement est valable aussi pour un maximum du potentiel gravitationnel) est alors différent de celui qu'il subit pour ressortir du puits. Cet effet est appelé effet Sachs-Wolfe intégré, et est important pour les grandes échelles. En particulier, les perturbations du

potentiel gravitationnel décroissent en amplitude quand l'univers n'est pas dominé par la matière. Ceci pourrait être le cas dans l'histoire récente de l'Univers, si celui-ci est dominé par la constante cosmologique ou l'énergie noire ($\Omega_\Lambda > \Omega_{mat}$). L'effet Sachs-Wolfe intégré fournit une possibilité de test de la présence d'énergie du type constante cosmologique. Malheureusement, cet effet est cantonné aux très grandes échelles, et son évaluation est donc limitée par la variance cosmique.

2.3.2 La réionisation homogène

On sait depuis les années soixantes (Gunn & Peterson 1965) que dans l'Univers actuel, l'hydrogène intergalactique est ionisé. La réionisation qui est intervenue est due à la première génération d'étoiles massives qui, en rayonnant dans l'ultraviolet, ont ionisé les atomes d'hydrogène. La présence de cet hydrogène ionisé affecte le spectre de puissance angulaire des anisotropies de températures, puisque des photons du fond diffus interagissent par effet Compton avec les électrons libres. L'effet principal de cette diffusion est de réduire tout le spectre (sauf la région des plus grandes échelles) des anisotropies de température d'un facteur voisin de l'épaisseur optique. Les anisotropies de polarisation, dont je parlerai plus loin, sont, elles, fortement augmentées à grande échelle par cette interaction, et c'est de cette manière que WMAP a récemment mis en évidence la réionisation (voir chapitre suivant).

2.3.3 L'effet Sunyaev-Zel'dovich

Lorsque les photons du fond diffus cosmologique passent à travers un amas, ils peuvent subir une diffusion Compton sur les électrons à haute température $T \simeq 10^8 K$ du gaz intra-amas. Cette diffusion entraîne en moyenne un gain d'énergie pour les photons incidents qui se traduit par une augmentation de la température des photons diffusés. Il y a donc une diminution du nombre de photons à basse fréquence et une augmentation à haute fréquence.

Quantitativement, lorsqu'un rayonnement de corps noir d'intensité $I(\nu)$,

$$I(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} (e^{h\nu/k_B T_{CMB}} - 1)^{-1}, \quad (2.52)$$

traverse le milieu ionisé, il subit une déformation :

$$\Delta I(x) = y I_0 f(x) \quad (2.53)$$

où $I_0 = \frac{h\nu}{c^2} (\frac{k_B T_{CMB}}{h})^3$, $x = \frac{h\nu}{k_B T_{CMB}}$ est la fréquence "réduite", y est le "paramètre de comptonisation" donné par

$$y = \int_{LV} \sigma_T n_e \frac{k_B T_e}{m_e c^2} dl \quad (2.54)$$

avec :

- σ_T la section efficace Thomson
- n_e la densité électronique

- T_e la température électronique
- dl un élément de longueur le long de la ligne de visée LV.

Dans l'approximation non relativiste, $f(x)$ est donnée par (Birkinshaw 1999)

$$f(x) = x^4 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \left(x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right). \quad (2.55)$$

La figure 2.7 montre la diminution du nombre de photons à basse fréquence, et l'augmentation à haute fréquence. Les fréquences du minimum, du zéro et du maximum de la fonction $f(x)$ valent respectivement 143, 217 et 353 GHz. L'effet Sunyaev-Zel'dovich peut être mis en évidence sur des amas

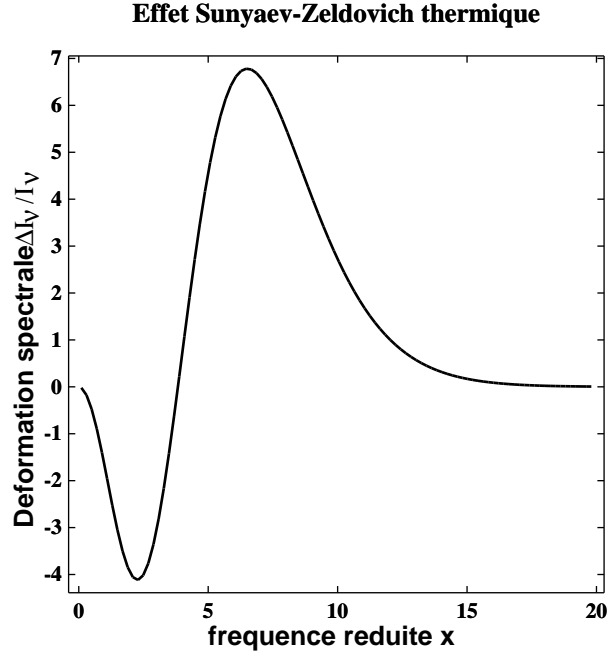


FIG. 2.7 – Fonction $f(x)$ donnant la modification de l'intensité en fonction de la fréquence réduite $x = h\nu/k_B T_{CMB}$. Les fréquences du minimum, du zéro et du maximum de la fonction $f(x)$ valent respectivement 143, 217 et 353 GHz.

individuellement (Birkinshaw, Gull, & Hardebeck 1984) ou bien en calculant la contribution qu'il apporte au spectre de puissance angulaire (Refregier & Teyssier 2002).

2.4 Influence des principaux paramètres cosmologiques sur le spectre de puissance angulaire C_ℓ .

Il est clair au vu de la partie précédente que le spectre de puissance au moment de la recombinaison $P(k)$ dépend des paramètres cosmologiques décrivant la composition de l'Univers à cette époque, ainsi que du spectre des fluctuations primordiales, alors que l'influence de la géométrie de l'Univers se fait à travers l'effet de projection, c'est-à-dire au cours du trajet des photons depuis la surface de dernière diffusion jusqu'à $z = 0$. Dans toute cette partie, les paramètres autres que celui dont on étudie l'influence auront les valeurs du modèle cosmologique préféré par les données actuelles (sans réionisation toutefois) :

- $\Omega_b = 0.044$ densité de matière baryonique,
- $\Omega_{cdm} = 0.3$ densité de matière noire froide,
- $\Omega_\Lambda = 0.7$ densité équivalente de la constante cosmologique,
- $H_0 = 70$ la constante de Hubble,
- $n_s = 1$ indice spectral des fluctuations scalaires,
- $\tau = 0$ profondeur optique due à la réionisation.

Ici $\Omega_x = \left(\frac{\rho_x}{\rho_{crit}}\right)_0$ et $(\rho_{crit})_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$. Par ailleurs, la normalisation du spectre de puissance est fixée par l'expérience COBE-DMR aux petits ℓ . La valeur de Ω_γ est mise à 0, tout comme la contribution des neutrinos Ω_ν .

2.4.1 Influence de la géométrie : rôle de Ω_{tot} et Ω_Λ

Nous avons montré dans le §2.2.2 que les modes de Fourier $\Theta(\mathbf{k})$ qui dominent les inhomogénéités de température forment une série (voir Eqs 2.29 et 2.30) dont l'échelle est "l'horizon sonique", c'est-à-dire la distance s_* parcourue par les ondes acoustiques entre l'époque où elles peuvent commencer à se développer et la date de la recombinaison. Cette échelle de distance peut être calculée avec précision lorsque l'on fait un choix de paramètres cosmologiques, et, en fait, dépend relativement peu de ces paramètres. Toutefois il s'agit de distances calculées à la date η_* de la recombinaison. Le calcul des angles $\Delta\alpha$ sous lesquels les inhomogénéités dominantes sont observées aujourd'hui fait intervenir la distance de diamètre angulaire

$$D_{ang} = \frac{\Delta l}{\Delta\alpha}$$

d'objets observés sur la surface de dernière diffusion. Comme on l'a vu au chapitre 1, cette distance de diamètre angulaire dépend essentiellement de la géométrie de l'Univers. La position des pics doit donc être reliée aux paramètres décrivant la géométrie de l'Univers, à savoir Ω_{tot} et Ω_Λ . C'est ce qu'on peut observer sur les figures 2.8 et 2.9 qui montrent plusieurs modèles cosmologiques calculés pour différentes valeurs de Ω_{tot} et Ω_Λ . On observe bien un décalage des pics dans le spectre de C_ℓ . Nous reviendrons sur ce point dans la dernière partie de ce chapitre où cette dépendance sera étudiée en se basant simplement sur le calcul de la distance de diamètre angulaire et sur la taille physique des perturbations au moment de la recombinaison.

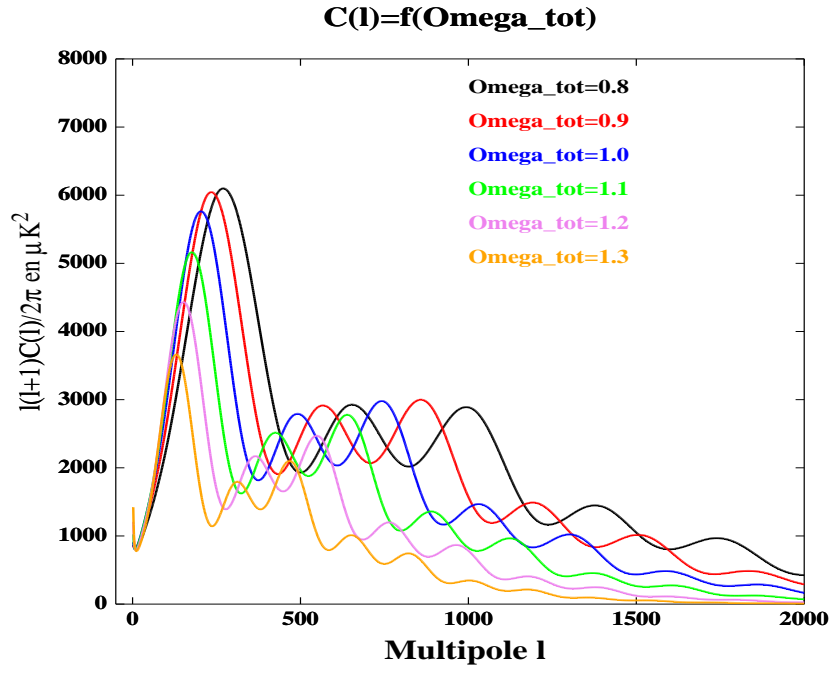


FIG. 2.8 – Plusieurs spectres de puissance angulaire C_ℓ montrant la dépendance en fonction de la densité totale de l'Univers Ω_{tot} .

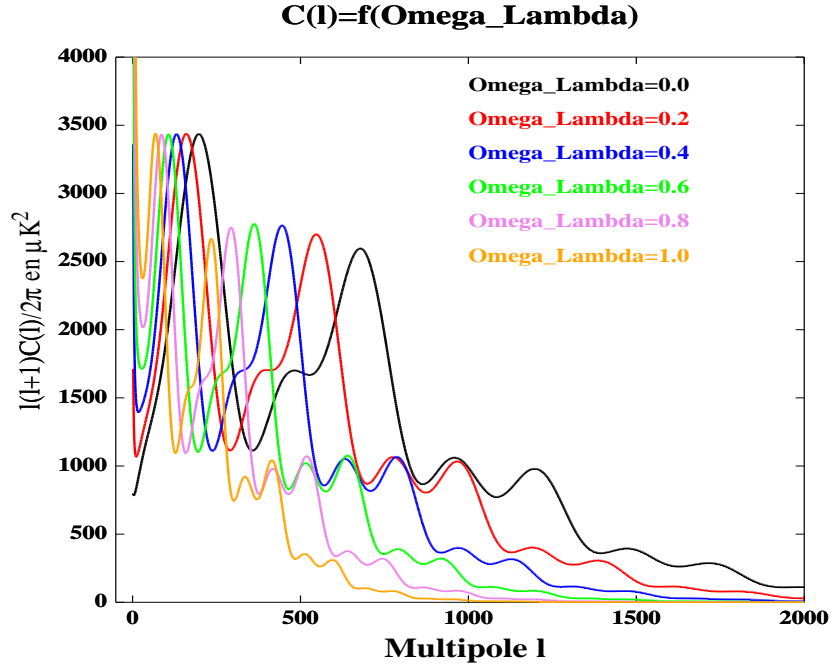


FIG. 2.9 – Plusieurs spectres de puissance angulaire C_ℓ montrant la dépendance en fonction de la densité d'énergie de l'énergie noire Ω_Λ .

2.4.2 Influence du contenu en matière de l'univers : Ω_{CDM} et Ω_b

Le contenu en matière de l'Univers influence la forme du spectre de puissance $P(k)$. Comme on l'a déjà vu, la densité physique des baryons $\Omega_b h^2$ joue sur la hauteur relative des pics acoustiques pairs et impairs. La figure 2.10 illustre l'augmentation de la hauteur du premier et du troisième pic avec l'augmentation de Ω_b , alors que la hauteur du deuxième pic diminue.

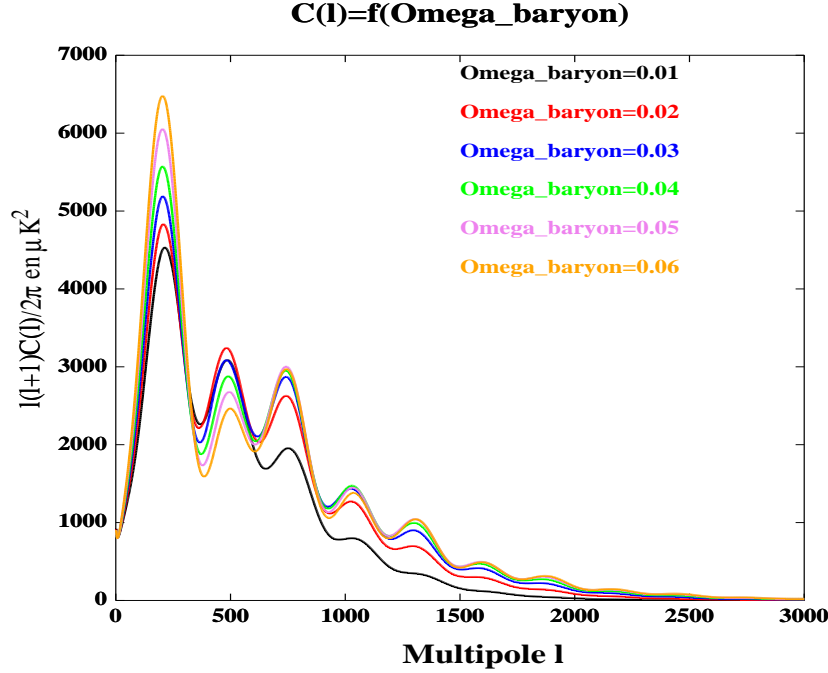


FIG. 2.10 – Plusieurs spectres de puissance angulaire C_ℓ montrant la dépendance en fonction de la densité d'énergie des baryons Ω_b .

La densité de matière noire influe aussi sur le spectre de puissance, en modifiant la date de l'équivalence matière-radiation. Si la densité de matière noire est plus importante, l'équivalence matière-radiation prend place plus tôt dans l'histoire de l'Univers, et ce ne sont plus les perturbations du fluide de baryons-photons qui dominent le potentiel gravitationnel, mais celles de la matière noire dont la dynamique est totalement différente, puisque la pression associée à ce fluide est nulle. Il s'ensuit que la décroissance du potentiel gravitationnel est moindre lorsque Ω_{CDM} a des valeurs plus élevées. Comme cette décroissance amplifie les oscillations acoustiques (voir la section 2.2.2) l'évolution des courbes de la figure 2.11 en fonction de Ω_{CDM} s'interprète sur cette base.

Par ailleurs, dans le cas présenté, Ω_Λ est fixé, et donc une augmentation de Ω_{CDM} augmente Ω_{tot} ce qui provoque le décalage des pics déjà vu sur la figure 2.8.

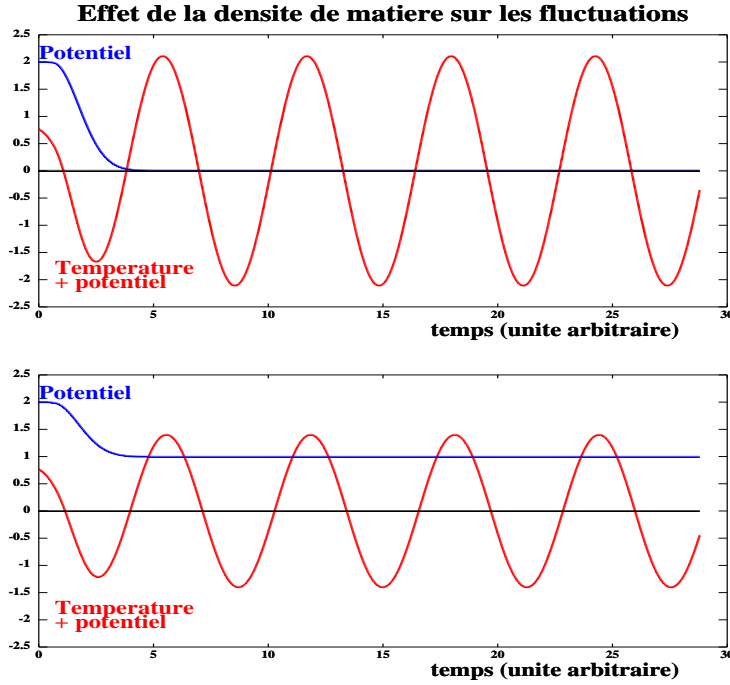


FIG. 2.11 – *Modification de l'amplitude des anisotropies de la température effective $\Theta + \Psi$ par la décroissance du potentiel gravitationnel. Les deux cas présentés correspondent à des dates différentes pour l'équivalence matière-rayonnement. En haut, l'équivalence matière-rayonnement est tardive. En bas, l'équivalence matière-rayonnement a lieu plus tôt et le potentiel gravitationnel a moins de temps pour décroître. L'amplitude des oscillations de température $\Theta + \Psi$ est alors moins augmentée par cet effet.*

2.4.3 Influence de l'indice spectral scalaire n_s

L'indice spectral scalaire n_s joue évidemment sur la forme du spectre de puissance initial des fluctuations, puisque $P(k) \propto k^{n_s}$. On peut voir sur la figure 2.13 que plus n_s est grand, plus le spectre de puissance angulaire est important, et plus la puissance aux petites échelles augmente par rapport aux grandes.

2.4.4 Influence de la constante de Hubble H_0

L'effet de H_0 est double. Il intervient dans le calcul de l'équivalence matière-radiation, donc dans la hauteur des pics, comme Ω_{cdm} . Mais il intervient aussi dans la densité physique de baryons $\Omega_b h^2$. L'effet dominant est, comme on peut le voir sur la figure 2.14, une diminution globale de la hauteur des pics. Cependant, lorsque H_0 devient de l'ordre de $80 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, l'effet de l'augmentation de la densité de baryons devient dominant et l'amplitude du premier pic cesse de diminuer, et réaugmente même pour $H_0 \simeq 90$.

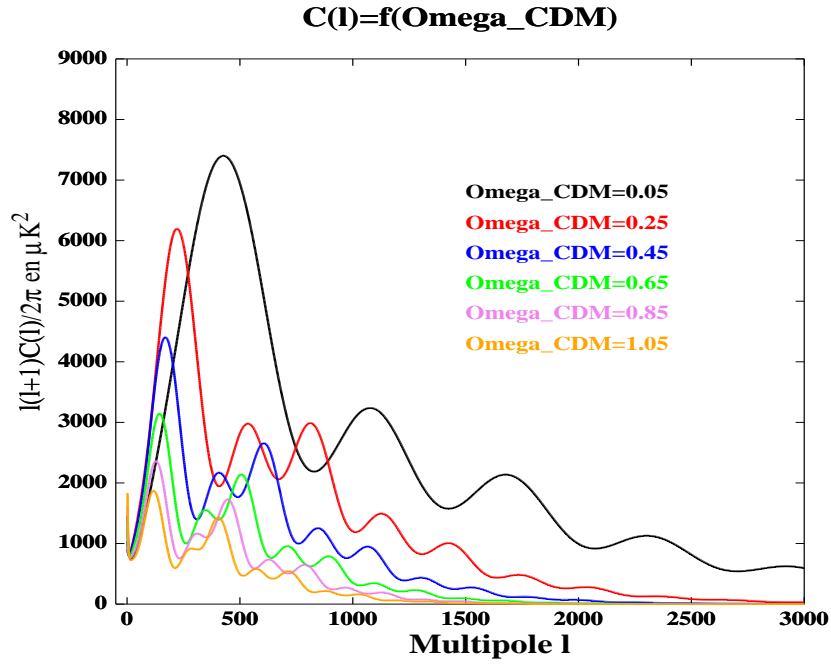


FIG. 2.12 – Plusieurs spectres de puissance angulaire C_ℓ montrant la dépendance en fonction de la densité de la matière noire froide Ω_{cdm} .

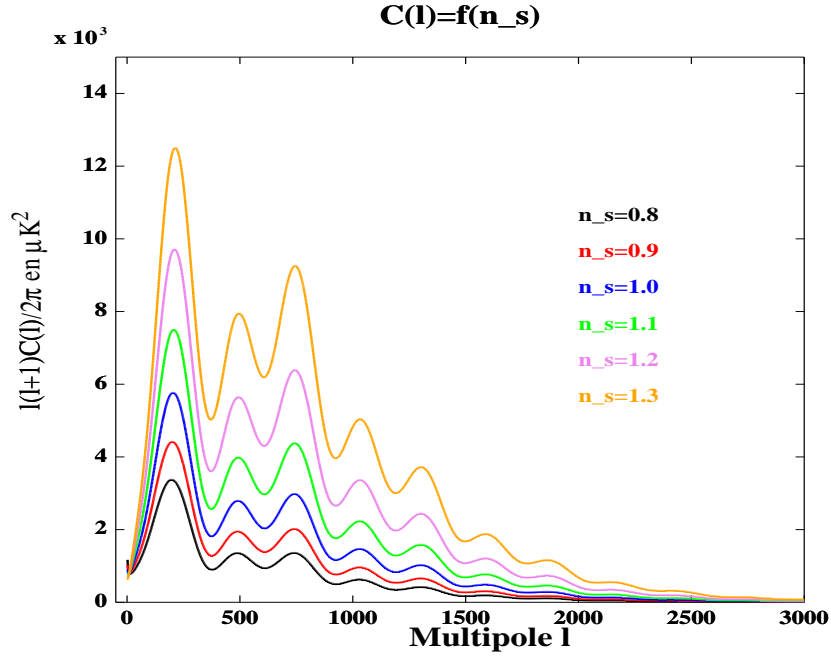


FIG. 2.13 – Plusieurs spectres de puissance angulaire C_ℓ montrant la dépendance en fonction de l'indice spectral scalaire n_s .

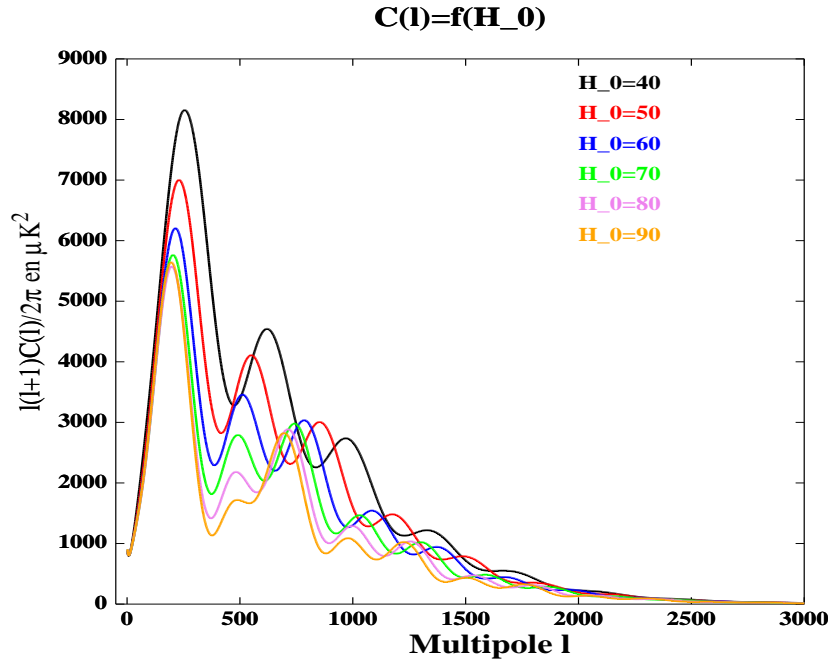


FIG. 2.14 – Plusieurs spectres de puissance angulaire C_ℓ montrant la dépendance en fonction de la constante de Hubble H_0 .

2.4.5 Réionisation

Comme on l'a vu dans la partie 2.3.2, la matière réionisée diffuse la lumière. Cette diffusion tend à effacer les anisotropies à toutes les échelles, comme on peut le voir sur la figure 2.15. Par contre on remarque dans le spectre de puissance des anisotropies de polarisation (voir 2.4.6) une bosse à très bas ℓ . La mesure du spectre de polarisation permet donc de mettre en évidence la réionisation et de mesurer de façon indépendante la profondeur optique de réionisation (dont dépend la probabilité d'interaction d'un photon avec une particule ionisée).

2.4.6 Polarisation

La section efficace différentielle de diffusion Thomson, qui intervient de façon essentielle dans la génération des anisotropies de température, dépend de la polarisation des ondes incidentes et réémises :

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} \propto \vec{e}_i \cdot \vec{e}_t$$

où \vec{e}_i (respectivement \vec{e}_t) représente la direction de polarisation de l'onde incidente (respectivement transmise). Dans un milieu où le rayonnement est isotrope, l'effet total est nul, mais si le rayonnement présente des anisotropies quadrupolaires, alors une polarisation linéaire est générée (voir figure 2.17).

La présence de ces anisotropies de polarisation permet :

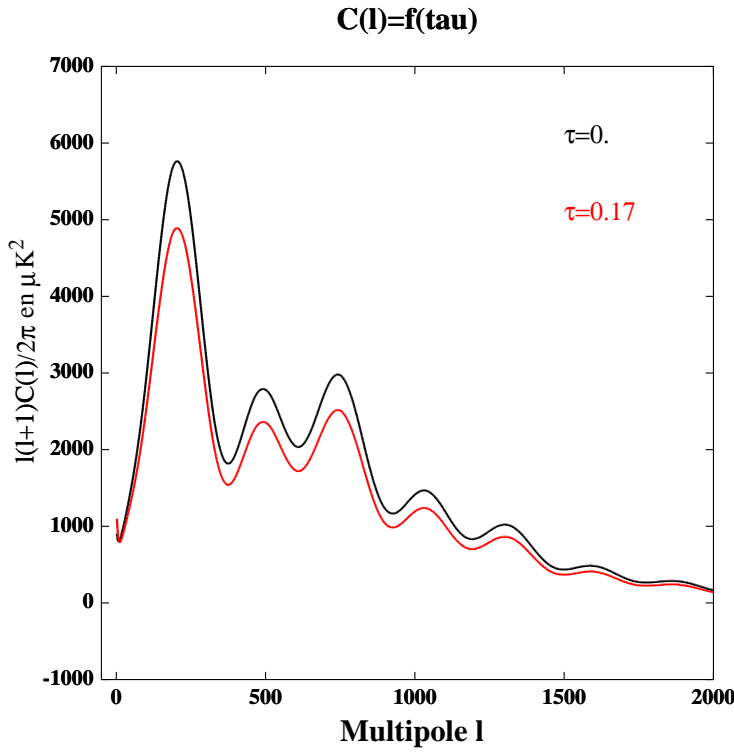


FIG. 2.15 – Deux spectres de puissance angulaire C_ℓ montrant leur dépendance en fonction de la profondeur optique de réionisation τ .

- de briser la dégénérescence entre les différents paramètres cosmologiques. La mesure de la polarisation permet en particulier d'isoler la contribution de la réionisation aux anisotropies de température (voir figure 2.15),
- de détecter de manière indirecte les ondes gravitationnelles primordiales prédites par les modèles d'inflation.

On décompose habituellement les anisotropies de polarisation selon deux modes, E et B, qui sont respectivement de l'ordre de 100 et 1000 fois plus faibles que les anisotropies de température (voir par exemple (Ponthieu N. 2003) pour plus de détails sur la polarisation).

2.5 LUC et la position du premier pic

La position du premier pic dans le spectre de puissance angulaire des anisotropies du fond diffus constitue l'une des principales observables pour la détermination des paramètres cosmologiques. Nous avons vu dans les sections qui précèdent l'influence des principaux paramètres sur la forme du spectre des anisotropies de température $C(\ell)$. Les pics et les creux du spectre sont dus aux oscillations acoustiques du fluide photons-baryons jusqu'au découplage rayonnement-matière. La position en ℓ du premier pic correspond à la taille angulaire typique des anisotropies du rayonnement de fond visibles

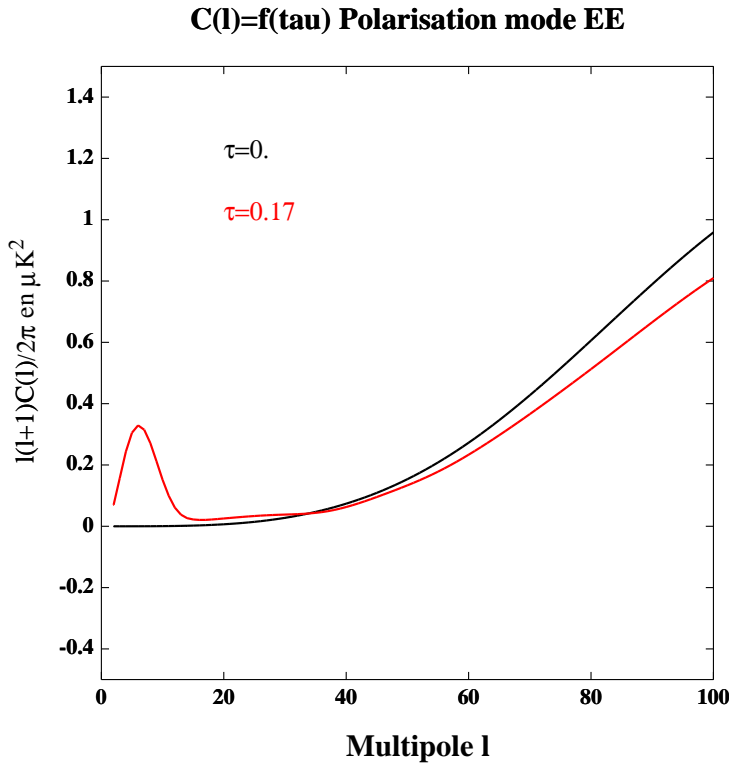


FIG. 2.16 – Deux spectres de puissance angulaire des anisotropies de polarisation (mode EE) C_ℓ montrant la dépendance en fonction de la profondeur optique de réionisation τ .

sur le ciel. Cette taille angulaire θ_A est souvent appelée l'échelle acoustique : $\theta_A \simeq \pi/\ell_{pic}$.

Ce paragraphe est consacré à une étude détaillée et quantitative de la position du premier pic ℓ_{pic} en fonction des différents paramètres cosmologiques. Outre l'intérêt de comprendre les mécanismes physiques qui déterminent l'échelle acoustique, celle-ci peut être utilisée pour améliorer la précision de l'interpolation du spectre de puissance entre différents points dans l'espace des paramètres. Cette utilisation de θ_A lors de l'interpolation des spectres de puissance est exposée dans le chapitre IV.

On explique habituellement que la détermination de ℓ_{pic} correspond à une mesure de distance de diamètre angulaire à $z \sim 1100$, mesure qui permet de contraindre la densité totale de matière et d'énergie Ω_{tot} . Nous allons voir que cette affirmation n'est que partiellement vraie, et que la position du pic dépend des différents paramètres de densité et du paramètre de Hubble.

Une estimation de distance de diamètre angulaire s'effectue à travers la détermination du diamètre angulaire apparent d'un objet de taille physique connue, à un décalage vers le rouge donné. La détermination de ℓ_{pic} correspond bien à la détermination de la taille angulaire apparente d'une échelle de longueur caractéristique au moment du découplage ($z_{dec} \sim 1100$). Par contre, cette échelle de longueur ne correspond pas à une longueur physique

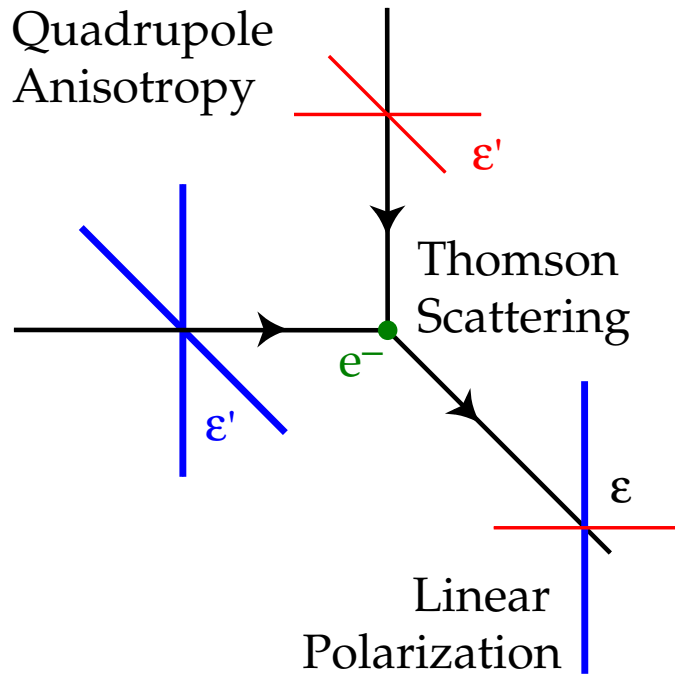


FIG. 2.17 – Schéma décrivant la formation d'anisotropies de polarisation en présence d'un rayonnement quadrupolaire (<http://background.uchicago.edu/whu/>).

fixée, mais une longueur dépendant elle-même des paramètres cosmologiques.

En effet, la taille physique typique des anisotropies de température du fond diffus est déterminée par l'horizon sonique au moment du découplage, c'est à dire la distance parcourue par les ondes acoustiques dans le fluide baryons-photons jusqu'au découplage. Cette distance varie donc en fonction des paramètres de densité de matière, de la constante cosmologique et du paramètre de Hubble qui déterminent l'écoulement du temps. La vitesse du son dans le plasma, ainsi que l'époque du découplage z_{dec} dépendent en outre de la densité des baryons, qui influe donc aussi sur la valeur de d_A .

2.5.1 LUC : Little Universe Calculator

LUC est un programme simple qui permet de calculer différentes grandeurs caractéristiques d'un modèle d'univers en fonction des paramètres cosmologiques. Ces quantités, essentiellement géométriques, sont calculées dans le cadre du métrique FRW (Friedman-Robertson-Walker). Le code est structuré en classes C++, la classe principale `SimpleUniverse` permet d'instancier un modèle d'univers avec des valeurs spécifiques de paramètres cosmologiques. Les méthodes de la classe permettent de calculer différentes quantités, en particulier la distance de diamètre angulaire et la distance de luminosité en fonction du décalage vers le rouge z .

Les étapes du calcul sont présentés dans de nombreux ouvrages classiques sur la cosmologie. Le code de LUC est basé sur le développement et

les notations présentée dans la référence *General Relativity and Cosmology*, *J. Peeble, Chapitre 13*. Le paramètre de Hubble H_0 détermine le temps caractéristique de l'univers $t_H = 1/H_0$, qui combiné à la vitesse de la lumière, définit à son tour l'échelle physique des longueurs $L_H = c/H_0$. La distance de diamètre angulaire à un décalage vers le rouge z s'écrit à partir de l'intégrale $I = \int_0^z \frac{dz}{E(z)}$ où l'expression $E(z)$ est définie par la relation :

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 E(z) = H_0 [\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}$$

Suivant la courbure de l'univers déterminée par la densité totale Ω_{tot} , la distance de diamètre angulaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \Omega_{tot} = 1 & \quad D_{da} = L_H \times \frac{1}{(1+z)} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \\ \Omega_{tot} < 1 & \quad D_{da} = L_H \times \frac{1}{(1+z)} \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_{tot}}} \sinh \left(\sqrt{1-\Omega_{tot}} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right) \\ \Omega_{tot} > 1 & \quad D_{da} = L_H \times \frac{1}{(1+z)} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{tot}-1}} \sin \left(\sqrt{\Omega_{tot}-1} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right) \end{aligned}$$

Le temps écoulé depuis un décalage vers le rouge z s'écrit à partir d'une autre expression intégrale :

$$\text{temps} = t_H \times \int_0^z \frac{dz}{(1+z)E(z)} = t_H \times J$$

Les deux intégrales ci-dessus ne peuvent pas être calculées analytiquement dans le cas général, sauf si $\Lambda = 0$. Une intégration numérique à pas adaptative est effectuée dans le programme LUC.

La distance parcourue par les ondes acoustiques s'exprime également à partir de $E(z)$, par une intégration jusqu'au découplage matière-radiation. Dans les résultats présentés dans la suite, nous avons considéré que les perturbations se propageaient à partir de l'époque d'égalité matière-radiation z_{eq} .

$$\text{Horizon sonique} = d_A = t_H \times \int_{z_{eq}}^{z_{dec}} c_s(z) \frac{dz}{(1+z)E(z)}$$

L'expression suivante a été utilisée pour la vitesse du son dans le plasma : *reference ?*

$$c_s(z) = c \left[3 \times \left(1 + \frac{3\Omega_b}{4\Omega_\gamma(1+z)} \right) \right]^{-1/2}$$

Si on néglige l'effet des baryons, la vitesse du son se réduit à une constante $c_s = c/\sqrt{3}$. La densité des baryons influe aussi sur l'époque de découplage z_{dec} . Le programme LUC comporte un algorithme simplifié de calcul de z_{dec} (Lang 1980). Mais nous verrons que la prise en compte de l'effet de la densité baryonique sur c_s et z_{dec} a un faible impact sur la valeur de ℓ_{pic} .

Les perturbations ayant une longueur d'onde $\lambda_A = 4d_A$ se trouvent dans un état de compression maximum lors du découplage. Cette longueur d'onde détermine donc la taille typique des plus grandes structures visibles sur le fond diffus.

$$\theta_A = \lambda_A/D_{da}(z_{dec}) \longrightarrow \ell_{pic} = \pi/\theta_A = \pi D_{da}(z_{dec})/\lambda_A$$

2.5.2 Comparaison ℓ_{pic} LUC - CAMB

Nous avons calculé les quantités ci-dessus pour près de 100000 modèles cosmologiques, en faisant varier les paramètres de densité et H_0 . Pour ces mêmes modèles, nous avons calculé le spectre de puissance avec CAMB ($n_s = 1, \tau = 0 \dots$) et déterminé la position du pic ℓ_{pic}^{CAMB} .

Matière noire froide	$0 < \Omega_c < 0.8$
Constante cosmologique	$0 < \Omega_\Lambda < 0.8$
Matière baryonique	$0.02 < \Omega_b < 0.06$
Paramètre de Hubble	$65 \leq H_0 \leq 95$

La figure 2.18 représente l'évolution de la position du premier pic acoustique ℓ_{pic} déterminée sur des spectres calculés par CAMB. On voit clairement que la variation de ℓ_{pic} ne peut être résumée à une dépendance en fonction de la densité totale ($\simeq \Omega_c + \Omega_\Lambda$). A Ω_{tot} fixé, Ω_c (ou Ω_Λ , ou $\Omega_c - \Omega_\Lambda$) est alors le paramètre dominant pour les variations de ℓ_{pic} .

La figure 2.19 représente l'évolution de la distance de diamètre angulaire (D_{da}) en mégaparsecs, pour un décalage vers le rouge de $z=1100$. On peut convertir la valeur de D_{da} en position de pic acoustique, en utilisant une valeur fixe pour l'horizon sonore ($d_A \simeq 40$ kpc). La valeur de ℓ_{pic} ainsi obtenue représente une dispersion relativement grande lorsqu'on la compare à la position du premier pic acoustique ($\Delta l/l \sim 20\%$). Cette distribution ($20 * D_{da}/\ell_{pic}^{CAMB}$) est représentée sur la figure 2.19, à droite.

La figure 2.20 représente le rapport entre la position du pic calculé avec LUC et celle obtenue sur les spectres CAMB. On voit que la position calculée par LUC reproduit celle de CAMB avec une dispersion de moins de 5%. La prise en compte de l'effet des baryons permet d'améliorer légèrement la précision du calcul de LUC (figure 2.20 droite).

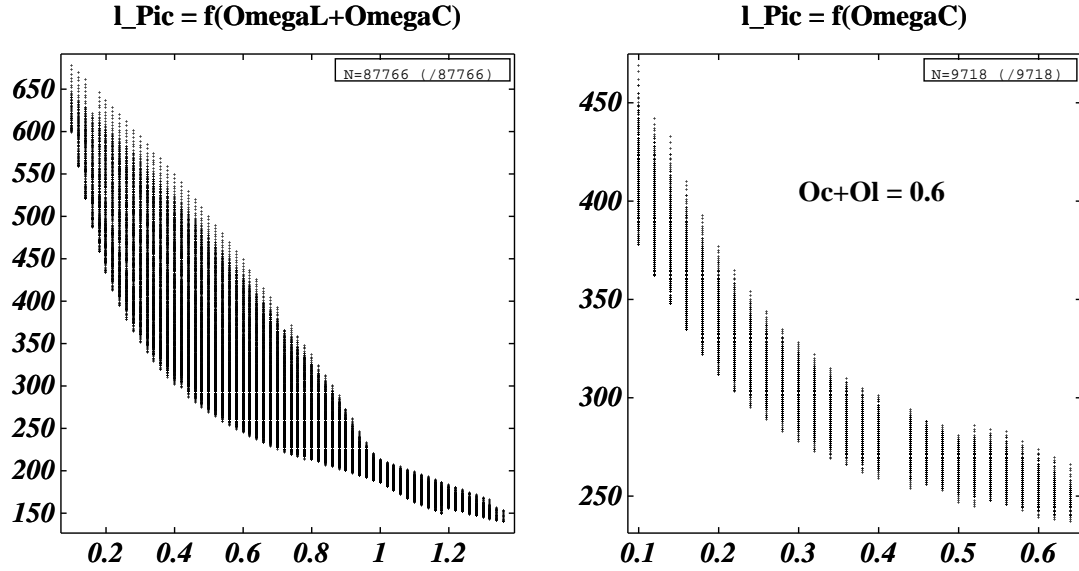


FIG. 2.18 – Variation de la position du premier pic déterminé sur des spectres $c(l)$ calculés par CAMB, pour les modèles étudiés ici. Figure de gauche : ℓ_{pic} en fonction de $\Omega_{tot} = \Omega_\Lambda + \Omega_c$. Figure de droite : ℓ_{pic} en fonction de Ω_c pour $\Omega_\Lambda + \Omega_c = 0.6$

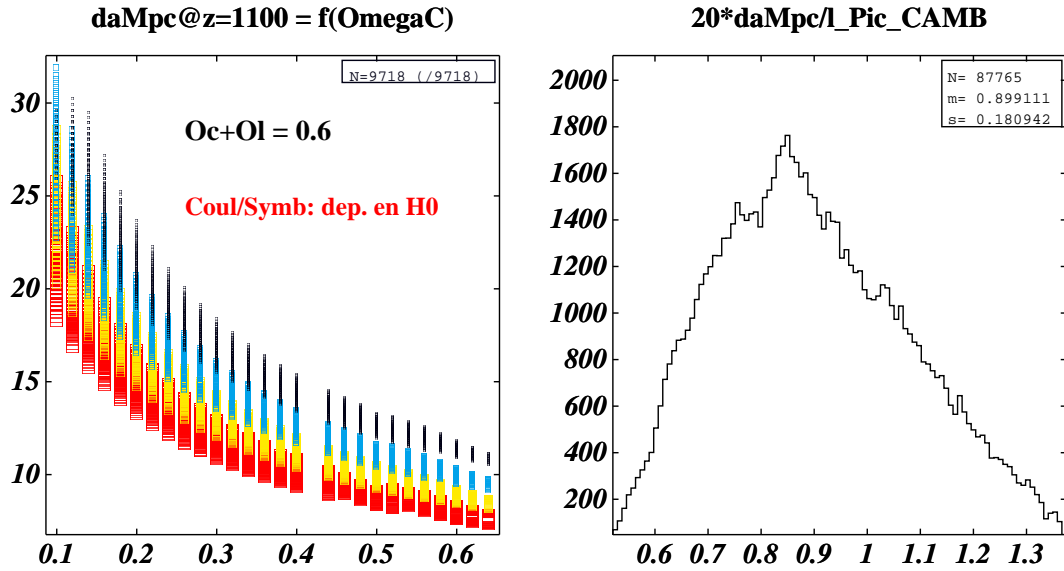


FIG. 2.19 – Gauche : Distance de diamètre angulaire D_{da} calculée avec LUC, à $z = 1100$ en Mpc, en fonction de Ω_c pour $\Omega_\Lambda + \Omega_c = 0.6$. Le codage en couleur/taille de symbole représente la variation avec H_0 .

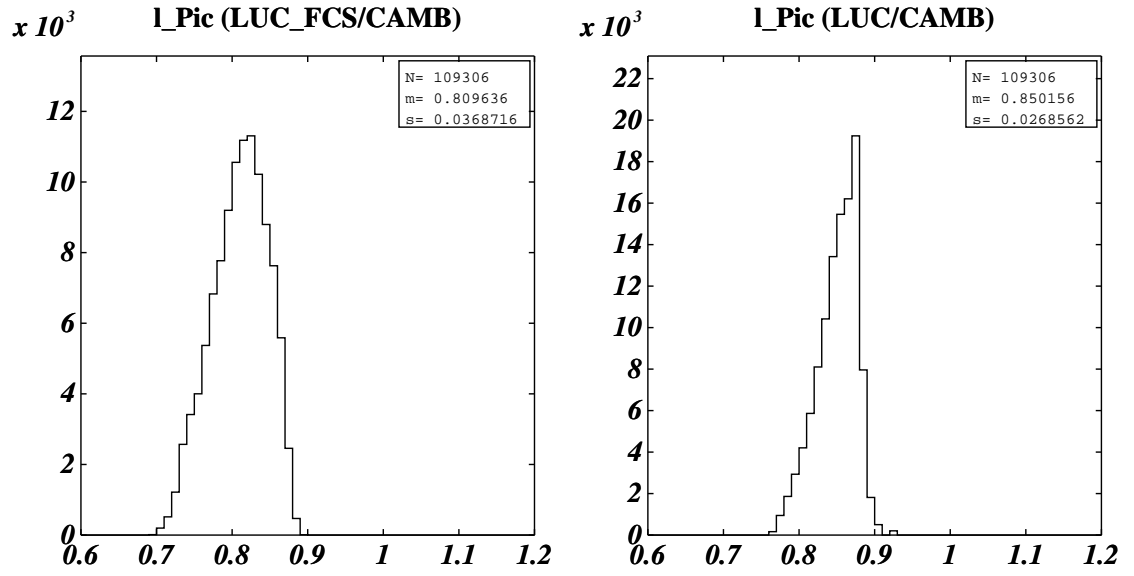


FIG. 2.20 – Distribution du rapport $\ell_{pic}^{LUC} / \ell_{pic}^{CAMB}$ pour tous les modèles étudiés ici. Gauche : d_A calculé avec $z_{eq} \sim 3500$, $z_{dec} = 1100$ et $c_s = c/\sqrt{3}$ - sans prendre en compte l'effet de Ω_b . Droite : Prise en compte de l'effet de Ω_b sur la vitesse du son et z_{dec} , et l'effet de Ω_c sur z_{eq} .

Bibliographie

- Abbott, L. F. & Schaefer, R. K. 1986, *Astrophysical Journal*, 308, 546
- Birkinshaw, M., Gull, S. F., & Hardebeck, H. 1984, *Nature*, 309, 34
- Birkinshaw, M. 1999, *Physics Report*, 310, 97
- Douspis M., *Analyse statistique des anisotropies du fond diffus cosmologique*,
Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 2000
- Gunn, J. E. & Peterson, B. A. 1965, *Astrophysical Journal*, 142, 1633
- Hu, W. & Dodelson, S. 2002, *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*,
40, 171
- Lang, K.R., “*Astrophysical Formulae*”, 1980, Springer-Verlag
- Longair, M. S., “*Galaxy Formation*”, 1998, Springer
- Ma, C. & Bertschinger, E. 1995, *Astrophysical Journal*, 455, 7
- Ponthieu N., *Polarisation du fond diffus cosmologique et de l’émission de la
poussière intergalactique*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier,
Grenoble I, 2003
- Press, H. W., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., “*Numerical
Recipes in C*”, 1988, Cambridge University Press
- Refregier, A. & Teyssier, R. 2002, *Physical Review D*, 66, 43002
- Rich J., *Fundamentals of cosmology*, Springer, 2001
- Sachs, R. K. & Wolfe, A. M. 1967, *Astrophysical Journal*, 147, 73
- Seljak, U. & Zaldarriaga, M. 1996, *Astrophysical Journal*, 469, 437
- Silk, J. 1968, *Astrophysical Journal*, 151, 459
- White, M., Scott, D., & Silk, J. 1994, *Annual Review of Astronomy & As-
trophysics*, 32, 319
- Weinberg S., “*Gravitation and Cosmology*”, 1972, John Wiley and Co.
- Zaldarriaga, M., Seljak, U., & Bertschinger, E. 1998, *Astrophysical Journal*,
494, 491

Chapitre 3

Les observations du fond diffus cosmologique

Des la détection du fond diffus cosmologique par Penzias et Wilson en 1965 (voir chapitre 1), des observations ont été mises en place afin de mettre en évidence deux caractéristiques de ce rayonnement :

- la nature de corps noir de celui ci, qui serait une preuve forte en faveur de la théorie du big bang,
- la présence de fluctuations de température dans le rayonnement, indispensables pour expliquer la formation des grandes structures dans le modèle cosmologique en construction.

Les observations de la fin des années 60 sur le spectre du rayonnement ont alors permis de confirmer la nature de corps noir du rayonnement observé en 1965, la preuve définitive venant de l'instrument COBE-FIRAS en 1992. Par ailleurs, de 1970 à 1992, plusieurs expériences ont tenté de mesurer des anisotropies de température, tout en ne parvenant qu'à poser des limites supérieures sur l'amplitude de ces anisotropies (Partridge 1995).

Le fond diffus cosmologique est, comme on l'a vu au chapitre 2, un rayonnement fossile issu de l'univers à la recombinaison. La température de ce corps noir cosmologique est de 2.725 K aujourd'hui, ce qui correspond à des longueurs d'ondes situées dans le domaine millimétrique ¹. Dans ce domaine de longueur d'onde, deux technologies sont concurrentes :

- une technologie issue des techniques de l'infra-rouge lointain, basée sur la détection de puissance à l'aide de bolomètres, utilisée au dessus de 100 GHz,
- une technologie issue de la radio-astronomie, à détection hétérodyne, utilisée par exemple dans le satellite MAP (voir §3.3.2), pour des fréquences inférieures à 100 GHz ($\lambda = 3mm$).

¹La longueur d'onde typique du rayonnement d'un corps noir est obtenue par :

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} = \frac{\partial \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \right)}{\partial \nu} = 0$$

qui donne la longueur d'onde à laquelle le corps noir émet le maximum de puissance. La résolution de cette equation $\frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} = 0$ donne la loi de déplacement de Wien $\lambda_{max} T = 2.9 \cdot 10^{-3}$ en unités SI

Je passerai en revue ces méthodes de détection, puis la manière dont on peut quantifier les performances d'une expérience, dans la partie §3.1. Enfin, je présenterai successivement les expériences passées (§3.2), actuelles, et futures (§3.3) sur le CMB. Je présenterai plus longuement l'expérience Archeops (§3.3.3), dans le cadre de laquelle j'ai travaillé.

3.1 Les principes de détection

Dans l'objectif de détecter les anisotropies du CMB, deux technologies coexistent et se complètent :

- la détection du rayonnement par des techniques issues de la radio-astronomie (détection hétérodyne),
- la détection du rayonnement à l'aide de bolomètres, plutôt utilisée dans le domaine infrarouge lointain (détection bolométrique).

Ces deux technologies font appel à des processus de détection du rayonnement totalement différents. Je décrirai rapidement ces deux technologies, puis j'exposerai la possibilité et l'intérêt d'utiliser un mode interférométrique pour détecter les anisotropies du CMB dans la partie §3.1.3.

3.1.1 La détection hétérodyne

La détection hétérodyne consiste à détecter l'amplitude de l'onde incidente à l'aide d'une antenne, puis d'amplifier le signal afin de le détecter avec des détecteurs de type transistor. Cette méthode est limitée par la bande passante de ces transistors. Elle est utilisée jusqu'à 100 GHz dans le cadre des expériences sur le CMB.

Afin d'amplifier le signal, il est nécessaire en fait de rabaisser la fréquence du signal. En effet, les amplificateurs ne peuvent pas travailler à des fréquences de l'ordre de 20 à 100 GHz sans produire un bruit qui dominerait la mesure. Cette conversion de la fréquence du signal incident se fait à l'aide d'un élément non linéaire, comme une diode. Le signal de fréquence ν_0 est mélangé à un signal venant d'un oscillateur local, de fréquence proche ν_{ol} , afin de produire un signal de fréquence $\nu_{fi} = \nu_0 - \nu_{ol}$ plus basse. Ce signal à ν_{fi} est ensuite amplifié par des transistors HEMT (High Electron Mobility Transistors). Un exemple de ce type de chaîne de détection est présenté sur la figure 3.10.

3.1.2 La détection bolométrique

La détection bolométrique consiste à mesurer l'augmentation de chaleur produite par le rayonnement incident dans un matériau absorbant, en utilisant des thermomètres et un bain thermique maintenant l'absorbant à une température donnée (3.1). Cette méthode est intrinsèquement limitée par la température à laquelle on peut maintenir le système de détection, nécessitant un dispositif cryogénique.

Le centre du détecteur est l'ensemble absorbant/thermomètre. Dans les détecteurs bolométriques récents, comme dans Planck ou Archeops, l'absorbant est conçu de manière à être sensible aux longueurs d'ondes étudiées tout

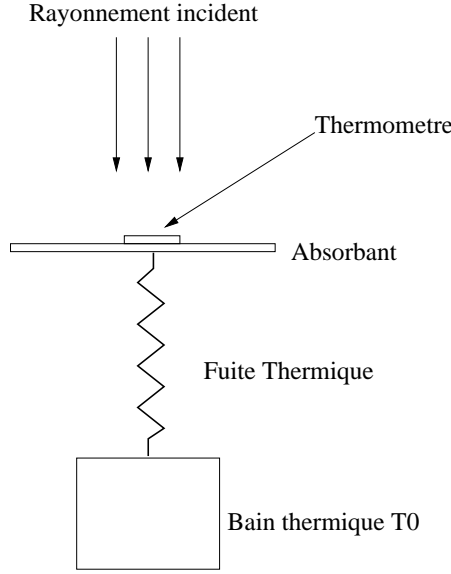


FIG. 3.1 – *Principe de fonctionnement d’un bolomètre. Le rayonnement incident chauffe l’absorbant, cet échauffement est mesuré par un thermomètre, une résistance dont la résistivité dépend de la température, ce qui donne une mesure de la puissance du rayonnement incident. Le bain thermique à la température T_0 maintient, via la fuite thermique, l’absorbant à la température de fonctionnement.*

en laissant passer dans les “trous” les particules cosmiques (bolomètres “spiderweb”, fig. 3.2). La sensibilité du bolomètre étant inversement proportionnelle à la température, le détecteur est plongé dans un système cryogénique complexe (voir par exemple (Madet 2002)).

Par ailleurs, un télescope et un système de cornets sont utilisés afin de conduire le rayonnement jusqu’au détecteur. Ce système optique est lui même refroidi, pour limiter le fond de rayonnement venant de l’instrument. Des filtres intégrés aux cornets ou placés devant les bolomètres permettent aussi de sélectionner la fréquence de travail (bande passante).

3.1.3 Le mode interférométrique

Le mode interférométrique consiste à mesurer la corrélation entre les signaux reçus provenant de deux antennes. Ce mode d’observation permet d’atteindre des échelles angulaires plus petites qu’avec une antenne unique, puisque la taille angulaire observée est inversement proportionnelle à la distance entre les deux antennes. L’autre intérêt du mode interférométrique vient du fait que sur une portion du ciel assez petite pour que la courbure soit négligeable, la transformation en harmoniques sphériques (utilisée pour obtenir le spectre de puissance des anisotropies de température) de $T(x)$ est équivalente à la transformée de Fourier $\tilde{T}(\mathbf{u})$, ce qui se traduit par :

$$\langle \tilde{T}(\mathbf{u})^2 \rangle \approx C_\ell \text{ avec } \tilde{T}(\mathbf{u}) = \int d^2\mathbf{x} T(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}$$

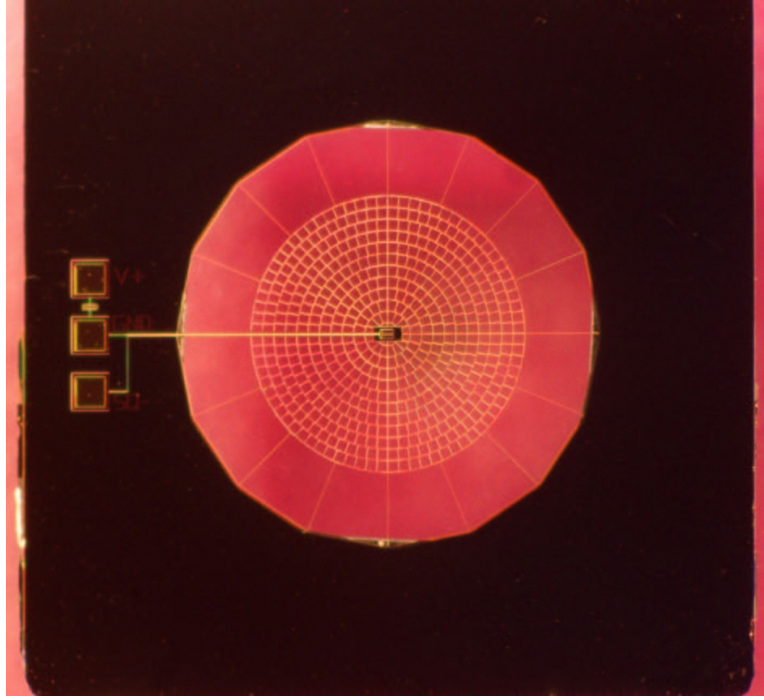


FIG. 3.2 – Photographie d’un bolomètre de Boomerang, semblable aux bolomètres d’Archeops, Maxima et Planck. L’absorbant est constitué des parties claires sur la photographie. La forme en toile d’araignée permet d’être sensible au rayonnement millimétrique du CMB et de laisser passer les rayons cosmiques. On peut voir au milieu de l’absorbant le thermomètre, une résistance dépendant de la température.

Par ailleurs, la corrélation entre 2 antennes de l’interféromètre séparées d’une distance \mathbf{b} et observée à une longueur d’onde λ est donnée par :

$$V(\mathbf{u}) = \int d^2\mathbf{x} \mathcal{A}(\mathbf{x}) I(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}} \quad \mathbf{u} = \mathbf{b}/\lambda \quad (3.1)$$

où $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ représente le lobe de l’antenne collectrice et I l’intensité spécifique du corps noir (voir équation 3.2). Moyennant la connaissance du lobe de l’instrument, on peut donc estimer le spectre de puissance des anisotropies de température.

Les interféromètres sont généralement équipés de plusieurs antennes afin de multiplier le nombre de lignes de bases \mathbf{u} disponibles pour l’estimation du spectre de puissance.

3.1.4 Unités utilisées dans les expériences CMB

Le fond diffus cosmologique présente une émission de corps noir à la température de 2.725 K (Fixsen & Mather (2002)). L’intensité spécifique émise par le corps noir suit la loi de Planck :

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \text{ en } W \cdot m^{-2} \cdot Hz^{-1} \cdot sr^{-1}. \quad (3.2)$$

On peut voir sur la figure 3.3 la dépendance de B_ν en fonction de ν pour une température de 2.725 K .

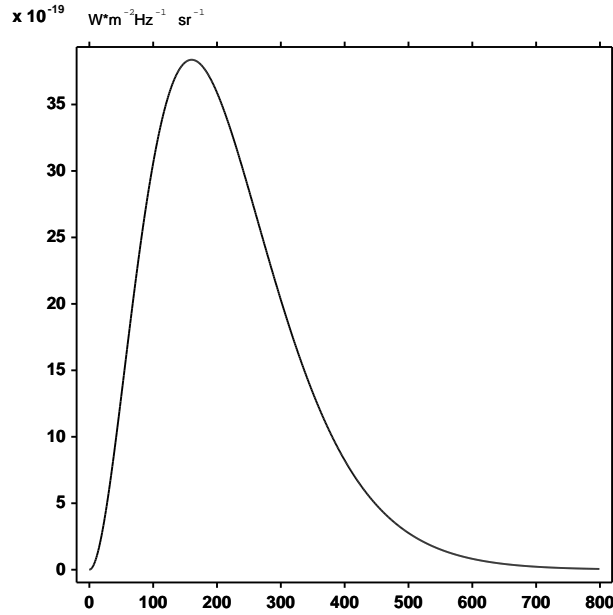


FIG. 3.3 – Courbe représentant la puissance B_ν du corps noir de température 2.725 K en fonction de la fréquence en GHz . La puissance maximale est atteinte pour $\nu \simeq 150\text{GHz}$.

Dans la partie basse fréquence du spectre (i.e $h\nu/kT \ll 1$), on peut utiliser l'approximation de Rayleigh-Jeans :

$$B(\nu, T) \approx \frac{2\nu^2 kT}{c^2} \text{ ou } B(\lambda, T) = \frac{2kT}{\lambda^2}. \quad (3.3)$$

Cette relation de proportionnalité avec la température conduit à utiliser des températures plutôt que des intensités dans les expériences de radioastronomie et sur le CMB. On a alors la température Rayleigh-Jeans :

$$T_{RJ} = c^2 \frac{B(\nu, T)}{2k\nu^2}.$$

Par extension, on utilise aussi des températures en dehors du domaine Rayleigh-Jeans, il faut alors préciser si la température est la température thermodynamique (l'unité est alors le K_{CMB} , venant de l'inversion de la relation 3.2) ou la température Rayleigh-Jeans (l'unité est alors le K_{RJ}), puisque les deux températures ne sont plus égales.

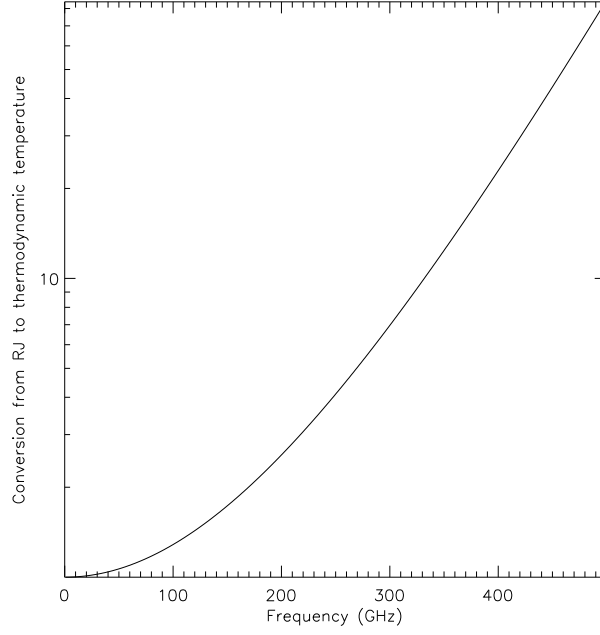


FIG. 3.4 – *Facteur de conversion entre la température thermodynamique et la température Rayleigh-Jeans en fonction de la fréquence.*

Si on écrit la température d'un point du ciel $T = T_0 + \Delta T_{CMB}$, on a :

$$\begin{aligned}
 B(\nu, T) &= B(\nu, T_0 + \Delta T_{CMB}) \\
 &\simeq B(\nu, T_0) + \left. \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T} \right|_{T=T_0} \Delta T_{CMB} \\
 \Delta B(\nu, T) &= T_0 \left. \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T} \right|_{T=T_0} \frac{\Delta T_{CMB}}{T_0}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Le spectre en fréquence des anisotropies de température du fond diffus a donc la forme de la dérivée de la fonction de Planck par rapport à la température (voir figure 3.5). C'est en particulier le spectre du dipôle (Fixsen et al. 1994). On peut alors utiliser un facteur de conversion pour convertir des différences de températures ΔT_{CMB} en ΔT_{RJ} ((Hamilton 2000) et figure 3.4) :

$$\Delta T_{CMB} = \left(\frac{[e^x - 1]^2}{x^2 e^x} \right) \times \Delta T_{RJ}, \quad x = \frac{h\nu}{kT_0} \tag{3.5}$$

T_0 étant la température moyenne du fond diffus.

3.1.5 Quantification des performances d'un détecteur

Pour comparer les performances des différents types de détecteurs, on est amené à modéliser la dégradation de la mesure du signal par le détecteur sous la forme d'un bruit additif :

$$m(t) = s(t) + n(t),$$

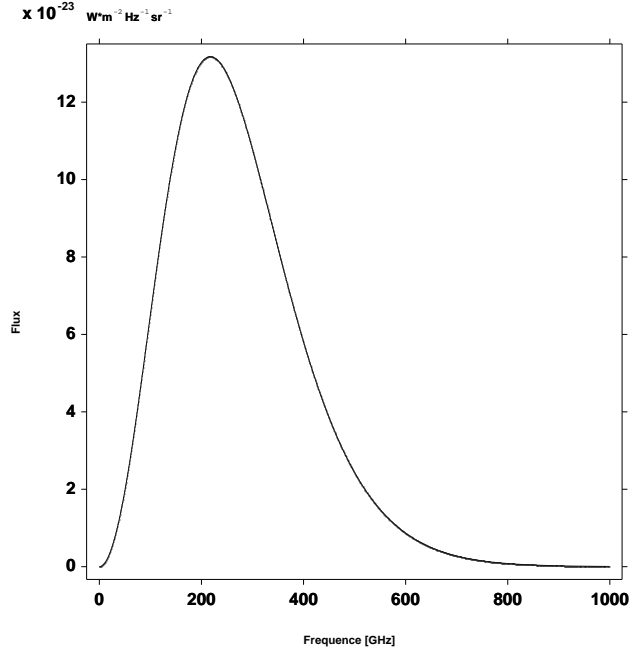


FIG. 3.5 – Courbe représentant le spectre en fréquence des anisotropies de température, conformément à la formule 3.4.

où $m(t)$ est la mesure fournie par le détecteur, $s(t)$ le signal physique que l'on souhaite mesurer, et $n(t)$ le bruit de la mesure, qui contient aussi bien le bruit d'origine physique que le bruit propre du détecteur. Si le bruit est indépendant du signal, alors :

$$\begin{aligned}
 \sigma_m^2 &= \langle [m(t) - \overline{m}(t)]^2 \rangle \\
 &= \langle [(s(t) - \overline{s}(t)) + (n(t) - \overline{n}(t))]^2 \rangle \\
 &\stackrel{s \text{ indép. de } n}{=} \langle [s(t) - \overline{s}(t)]^2 \rangle + \langle [n(t) - \overline{n}(t)]^2 \rangle \\
 &= \sigma_s^2 + \sigma_n^2
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

On note $\tilde{n}(\omega)$ la transformée de Fourier de $n(t)$:

$$\tilde{n}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} |n(t)|^2 dt$ est fini, on appelle σ_n^2 sa valeur. En pratique, le système de mesure n'effectue pas une mesure instantanée, mais une moyenne pondérée sur un petit intervalle de temps. Si on appelle $p(t)$ la réponse temporelle du détecteur, le signal mesuré s'écrit :

$$m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [s(\tau) + n(\tau)] p(t - \tau) d\tau. \tag{3.7}$$

On peut alors écrire la contribution du bruit à la variance de la mesure :

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} N(\omega) P(\omega) d\omega \tag{3.8}$$

$P(\omega)$ étant le carré de la transformée de Fourier de $p(t)$. Si $p(t)$ a une largeur caractéristique Δt , alors $P(\omega)$ a une largeur caractéristique $\Delta\omega \propto 1/\Delta t$. Dans l'hypothèse où le bruit est blanc, c'est à dire $\tilde{n}^2(\omega) = \tilde{n}^2 = \text{constante}$, on a :

$$\sigma_n^2 = 2\tilde{n}^2\Delta\omega \quad (3.9)$$

\tilde{n}^2 est la densité spectrale d'énergie du bruit blanc. La puissance équivalente de bruit (NEP pour Noise Equivalent Power) est égale par définition à la contribution du bruit à l'écart-type rapporté à une bande $\Delta\omega$ de 1 Hz, ce qui donne :

$$NEP = \sqrt{2\tilde{n}^2} \quad (3.10)$$

et s'exprime en W/\sqrt{Hz} . C'est la mesure de la NEP qui permet de mesurer les performances relatives des détecteurs.

Quand le signal mesuré correspond à la mesure d'une intensité de rayonnement électromagnétique, par exemple lors de l'observation du fond diffus micro-ondes, il faut prendre en compte une autre source de fluctuations, intrinsèque au processus d'émission et de réception de photons. Si on considère la puissance monochromatique $\tilde{P}(\nu)$ émise par un corps noir de température T dans un angle solide Ω et une surface S , avec $S\Omega = \lambda^2$, on peut montrer (Léna 1996) que deux termes sont présents dans les fluctuations intrinsèques de $\tilde{P}(\nu)$:

$$\tilde{P}(\nu) = B(\nu, T) S\Omega = B(\nu, T) \lambda^2 \quad (3.11)$$

$$\langle (\tilde{P}(\nu) - \langle \tilde{P}(\nu) \rangle)^2 \rangle = \tilde{P}(\nu) h\nu \left[1 + \left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right)^{-1} \right]. \quad (3.12)$$

Le premier terme représente une fluctuation du nombre de photons et est appelé bruit quantique. Il domine à grande distance de la source de rayonnement, et pour des fréquences $h\nu \gg kT$. C'est la seule source de bruit intrinsèque de rayonnement que nous prendrons en compte dans la suite.

La puissance incidente sur le détecteur est reliée à la température par les relations de Planck ou de Rayleigh-Jeans, suivant le régime, ce qui permet de calculer la température équivalente de bruit NET (Noise Equivalent Temperature en $\mu K/\sqrt{Hz}$).

Lors de l'observation des anisotropies du fond diffus, on mesure en général la puissance du rayonnement dans une direction du ciel donnée, intégrée dans l'angle solide $d\Omega$ et dans une bande de fréquence $(\nu_0, \Delta\nu)$ par le détecteur, pendant le temps d'observation t_{pix} dans la direction correspondante. Dans les expériences de type balayage, la direction varie avec le temps permettant ainsi de reconstruire une carte du ciel. Pour une direction d'observation donnée, on mesure donc une énergie P :

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \delta P \\ &= B_0 K + \beta K \delta T \end{aligned} \quad (3.13)$$

où :

$$- B_0 = B(\nu_0, T_0),$$

- $K = S d\Omega \Delta\nu t_{pix}$ où S est la surface collectrice, $d\Omega$ l'angle solide vu par un détecteur, $\Delta\nu$ la bande passante en fréquence centrée sur ν_0 et t_{pix} le temps d'observation dans cette direction,
- $\beta = \left. \frac{\partial B}{\partial T} \right|_{T=T_0} (\nu_0)$.

La figure 3.6 montre la valeur de P_0 et βK , en fonction de la fréquence, pour $T = 2.725K$, $S = 1m$, $d\Omega = 10^{-4} \text{ srad}$ et $\Delta\nu/\nu_0 = 0.1$.

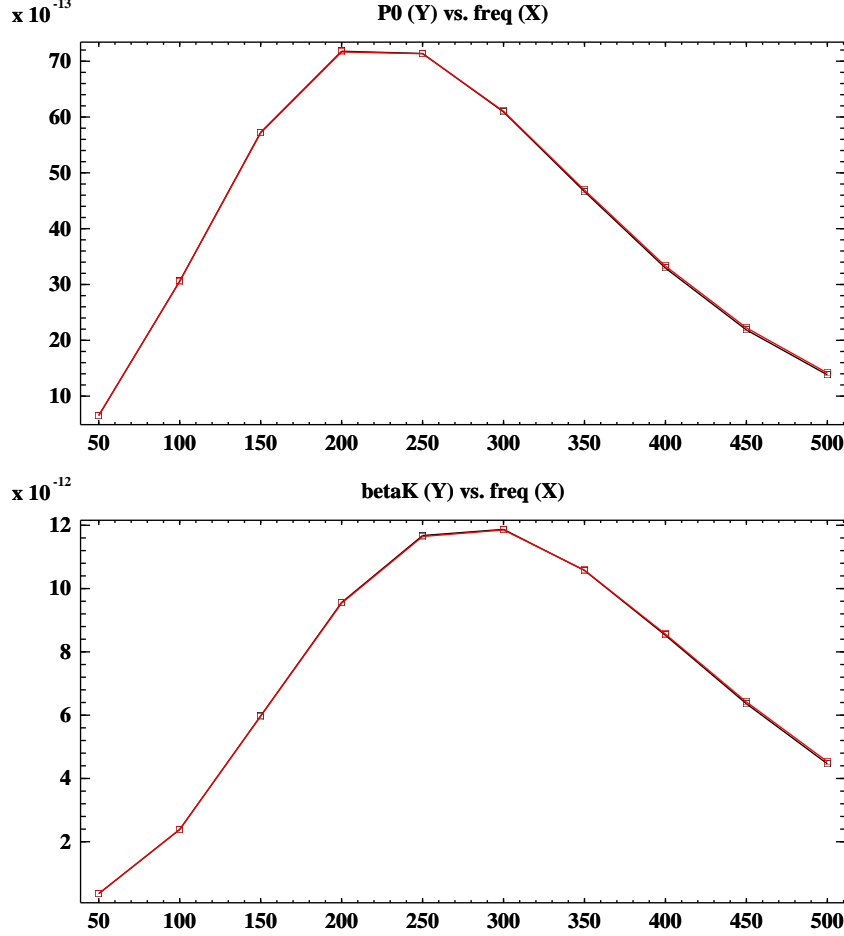


FIG. 3.6 – La partie haute de la figure montre la dépendance de P_0 en fonction de la fréquence pour un filtre de type porte (en noir) et un filtre gaussien (en rouge) de largeur à mi hauteur $\Delta\nu$. La partie basse montre la valeur du coefficient βK , pour les deux mêmes filtres. Ce facteur donne la conversion entre la température et l'énergie détectée. Les unités verticales sont des Joules (ou Joules/Kelvin pour βK), l'abscisse est en GigaHertz.

Si on considère une expérience effectuant N observations suivant des directions différentes, on peut alors reconstituer une carte du ciel ayant N pixels, chaque pixel couvrant un angle solide approximativement égal à l'angle solide vu par le détecteur (θ_{pix}). Le temps total d'observation est alors égal à $t_{exp} = N t_{pix}$. Pour chaque pixel i , on mesure le signal P_i correspondant

à une énergie :

$$P_i = P_0 + \delta P_i = P_0 + \beta K \delta T$$

avec une contribution de bruit blanc b_i , de moyenne nulle $\langle b \rangle = 0$, et de densité spectrale de puissance w_n ,

$$\langle b_i^2 \rangle \simeq \frac{w_n}{t_{pix}} = \langle b^2 \rangle.$$

La mesure dans le pixel i est donc $m_i = P_i + b_i$. La mesure du spectre de puissance des anisotropies du CMB correspond à une mesure de la variance des anisotropies de température à différentes échelles angulaires (voir chapitre 4 4.2.1). La variance de δT , $\langle \delta T^2 \rangle$ correspond au spectre de puissance intégré jusqu'à l'échelle spatiale $\ell_{max} \simeq \pi/\theta_{pix}$, où θ_{pix} correspond à l'échelle angulaire couverte par un pixel de la carte. L'erreur sur $\langle \delta T^2 \rangle$ déterminera donc l'erreur sur l'intégrale du spectre de puissance.

Chaque mesure m_i est entachée d'une incertitude

$$\sigma_i^2 = \underbrace{h\nu P_0}_{\text{Fluctuation du nombre de photons}} + \underbrace{\beta^2 K^2 \langle \delta T^2 \rangle}_{\text{Variance intrinsèque}} + \underbrace{\langle b^2 \rangle}_{\text{bruit de mesure}} = \sigma_m^2.$$

Si les anisotropies de température suivent une distribution gaussienne (cas des modèles inflationnaires) alors la distribution de $\langle \delta T^2 \rangle$ à partir des N mesures suit une loi de χ^2 à N degrés de liberté, de moyenne $\langle \chi^2 \rangle = N\sigma_m^2$. La variance de cette distribution vaut $2N\sigma_m^4$. On a alors :

$$\frac{\langle \chi^2 \rangle}{N} = \sigma_m^2 = h\nu P_0 + \beta^2 K^2 \langle \delta T^2 \rangle + \langle b^2 \rangle, \quad (3.14)$$

donc

$$Variance\left(\frac{\langle \chi^2 \rangle}{N}\right) = \frac{2}{N}\sigma_m^4$$

et l'incertitude sur $\langle \chi^2 \rangle / N$ est alors

$$Err\left(\frac{\langle \chi^2 \rangle}{N}\right) = \sqrt{\frac{2}{N}} (h\nu P_0 + \beta^2 K^2 \langle \delta T^2 \rangle + \langle b^2 \rangle). \quad (3.15)$$

Par ailleurs (voir équation 3.14)

$$\beta^2 K^2 \langle \delta T^2 \rangle = \frac{\langle \chi^2 \rangle}{N} - (h\nu P_0 + \langle b^2 \rangle).$$

On peut donc calculer

$$\beta^2 K^2 \left\langle \left(\frac{\delta T}{T_0}\right)^2 \right\rangle = \frac{1}{T_0^2} \left[\frac{\langle \chi^2 \rangle}{N} - (h\nu P_0 + \langle b^2 \rangle) \right].$$

En négligeant la contribution de l'incertitude de détermination des termes $h\nu P_0$ et $\langle b^2 \rangle$, on obtient :

$$Err\left(\left\langle \left(\frac{\delta T}{T_0}\right)^2 \right\rangle\right) = \frac{1}{T_0^2} \frac{1}{\beta^2 K^2} \sqrt{\frac{2}{N}} \sigma_i^2. \quad (3.16)$$

Or

$$\left\langle \left(\frac{\delta T}{T_0} \right)^2 \right\rangle = 4\pi \int_0^{lmax(\theta_{pix})} (2\ell + 1) C_\ell \stackrel{notation}{=} \widehat{\int C_\ell} \quad (3.17)$$

ce qui permet d'estimer l'erreur sur les C_ℓ :

$$Err \left(\widehat{\int C_\ell} \right) = \frac{1}{T_0^2} \sqrt{\frac{2}{N}} \left[\underbrace{h\nu \frac{P_0}{\beta^2 K^2}}_{\sigma_1^2} + \underbrace{\langle \delta T^2 \rangle}_{\sigma_2^2} + \underbrace{\frac{1}{\beta^2 K^2} \frac{w_n}{t_{pix}}}_{\sigma_3^2} \right]. \quad (3.18)$$

Le premier terme correspond au bruit “de photons” et le deuxième terme est la variance intrinsèque due aux fluctuations de température, limitée par la variance cosmique lorsque l'observation couvre tout le ciel. Le dernier terme correspond au bruit (supposé blanc) de la mesure. K est proportionnel à $t_{pix} = \frac{t_{exp}}{N}$, ce qui donne pour les différents termes :

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &\propto \frac{1}{K} && \propto \frac{N}{t_{exp}} \\ \sigma_2^2 &\propto && \text{constante} \\ \sigma_3^2 &\propto \frac{1}{K^2} \frac{1}{t_{pix}} && \propto \left(\frac{N}{t_{exp}} \right)^3. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Les calculs effectués ici supposent que le système de détection possède une gamme dynamique assez grande pour pouvoir lire des signaux dont l'amplitude varie comme t_{pix} sans changement de gain. Or en pratique ceci n'est pas vrai, si l'on augmente le temps d'intégration, on diminue le gain de manière à garder le signal électrique dans une plage donnée. Dans ce cas, on augmente t_{pix} en faisant plusieurs fois la mesure au même point du ciel. On réalise alors une moyenne de N mesures au point donné, moyenne dont la variance est alors proportionnelle à \sqrt{N} donc à $\sqrt{t_{pix}}$.

Les figures 3.7 et 3.8 représentent les performances de deux expériences aux caractéristiques suivantes :

- sur la figure 3.7, le temps total d'observation est de 30 heures, la taille des pixels de $34'$, et le bruit blanc de $100\mu K/\sqrt{Hz}$. Les observations sont faites à 150 GHz (cas “Archeops”).
- sur la figure 3.8, le temps total d'observation est de 115 jours, la taille des pixels de $10'$, et le bruit blanc de $1000\mu K/\sqrt{Hz}$. Les observations sont faites à 150 GHz (cas “WMAP”).

On obtient une valeur optimale du nombre de pixels pour chaque expérience, $\simeq 30000$ pour Archeops et $\simeq 10^6$ pour le cas WMAP.

3.2 Les expériences passées

Les instruments d'observations dédiés à l'étude du fond diffus peuvent être classés selon plusieurs critères. Comme on l'a vu précédemment, les types de détecteurs se placent dans 2 catégories :

- détecteurs radio, basés sur des HEMT,

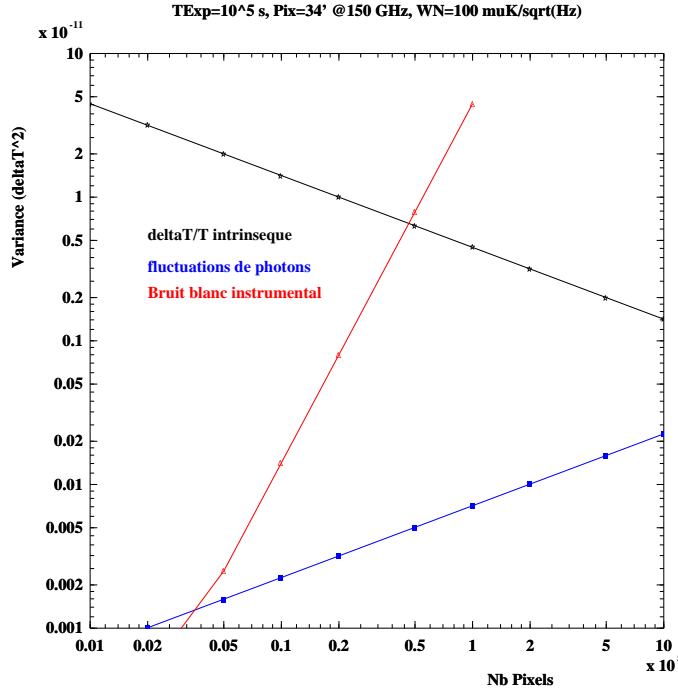


FIG. 3.7 – Niveaux des différentes sources d'incertitude définies dans 3.19. En noir le bruit intrinsèque (variance d'échantillonnage ou variance cosmique dans le cas d'un ciel complet), en bleu l'incertitude due aux fluctuations du nombre de photons et en rouge l'incertitude due au bruit de mesure (électronique, détection ...) dans le cas d'une expérience avec des caractéristiques proches d'Archeops ($\theta_{pix} = 34'$, $t_{exp} = 30h$, $w_n = 100\mu\text{K}/\sqrt{\text{Hz}}$).

- détecteurs bolométriques, utilisés conjointement à un système cryogénique actif.

On peut aussi classer les observations en fonction de la stratégie d'observation :

- soit de type balayage, où le ciel est balayé en continu par le lobe de l'instrument,
- soit de type interférométrique, où une zone du ciel est visée.

Enfin on peut définir trois sites d'observation :

- observation au sol, avec pour avantage un temps d'intégration long, une technologie récente, mais une contamination atmosphérique,
- observation en ballon stratosphérique, l'avantage étant de s'affranchir d'une partie du rayonnement atmosphérique,
- observation par satellite, qui élimine le problème de l'atmosphère, mais qui est beaucoup plus coûteux et impose de nombreuses contraintes sur les technologies utilisées.

Je résume dans le tableau 3.2 les observations du fond diffus faites dans les années 90 sur lesquelles je ne reviendrai pas dans la suite. Les informations

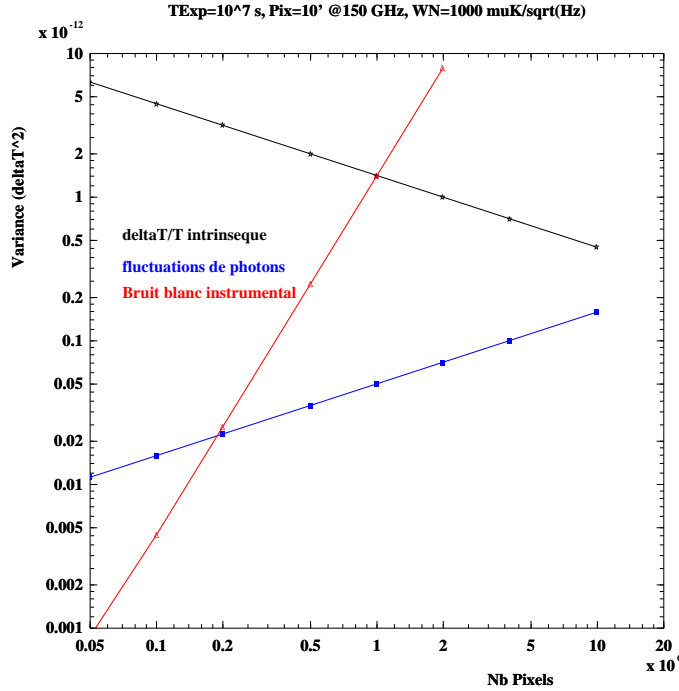


FIG. 3.8 – Niveaux des différentes sources d’incertitude définies dans 3.19. En noir le bruit intrinsèque (variance d’échantillonnage ou variance cosmique dans le cas d’un ciel complet), en bleu l’incertitude due aux fluctuations du nombre de photons et en rouge l’incertitude due au bruit de mesure (électronique, détection ...) dans le cas d’une expérience avec des caractéristiques proches de WMAP ($\theta_{pix} = 10'$, $t_{exp} = 115j$, $w_n = 1000 \mu K/\sqrt{Hz}$).

de ce tableau ont été extraites de (De Bernardis 1998) pour la partie ballon et de (Lasenby 1998) pour la partie sol.

3.2.1 Le satellite COBE

Le satellite COBE² est le premier à avoir détecté des anisotropies dans le fond diffus cosmologique. Ce satellite a été lancé en 1989. Les premiers résultats ont été publiés en 1992 (Smoot et al. 1992). Le satellite embarquait 3 instruments différents :

- l’instrument DMR (Differential Microwave Radiometer) (Smoot et al. 1990) dédié à l’étude des anisotropies du fond diffus cosmologique,
- l’instrument FIRAS (Far Infrared Absolute Spectrometer) (Mather, Fixsen, & Shafer 1993) utilisé pour étudier le spectre du corps noir cosmologique,

²http://space.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/cobe_home.html

Nom	Fréquence(GHz)	Bolo/HEMT	ℓ	notes
Expériences ballon				
ARGO	150,270,490,600	Bolo	53-180	balayage 1993
BAM	111-255	Bolo	30-100	balayage 1995
HACME	39,41,43	HEMT	10-180	balayage 1996
MAX	105,180,270,420	Bolo	78-263	balayage 1989 (5 vols)
MSAM I et II	70-630 (9 fréq)	Bolo	69-362	balayage 1992,1994,1995
QMAP	30,40	HEMT	30-850	balayage 1996
ACE	90	HEMT		balayage
BEAST I et II	30,40,90	HEMT	10-800	balayage 2000
Top Hat	170,280,420,500,630	Bolo	10-700	balayage 2001
Expériences sol				
Tenerife	10,15,33	HEMT	13-30	balayage 1994-
IAC-Bartol	91,142,230,272	Bolo		balayage 1994
Python	90	Bolo	55-240	balayage 1996-1997
Saskatoon	26-26	HEMT	52-401	balayage 1993-1995
OVRO	14.56,32	HEMT	1100-2750	balayage 1993-

FIG. 3.9 – Tableau résumé des expériences sur les anisotropies dans les années 1990

- l'instrument DIRBE (Diffuse Infrared Background Experiment) (Hauser et al. 1998) dédié à la recherche du fond diffus infrarouge.

DMR L'instrument DMR est basé sur le principe de détection hétérodyne évoqué plus haut. Il est composé de 6 détecteurs fonctionnant par paire, afin de mesurer des différences de températures. Les 3 canaux de détection ont pour fréquences 31.5, 53, et 90 GHz, choisies pour limiter la contamination par l'émission de la galaxie. On peut voir sur la figure 3.10 la chaîne complète de détection d'un canal.

Cet instrument a permis pour la première fois de mesurer les anisotropies de température à des échelles angulaires de l'ordre de ou supérieures à 7 degrés (figure 3.11). La résolution des détecteurs ne permettait pas à l'époque d'accéder à des échelles plus petites. Le spectre de puissance obtenu par DMR était, avant les résultats de MAP, la mesure la plus précise des anisotropies du CMB aux grandes échelles angulaires (Gorski et al. 1996).

FIRAS L'instrument FIRAS est un spectromètre, constitué d'un interféromètre de Michelson et d'un corps noir de référence, permettant la calibration. Le domaine de longueur d'onde couvert est 0.1-10 mm et la résolution spectrale est de 5%. L'instrument est refroidi à 1.5K pour éviter le rayonnement parasite venant de l'instrument lui-même. Le principe de détection est présenté sur la figure 3.12.

Cet instrument a permis de confirmer la nature de corps noir du rayonnement du fond diffus à une précision meilleure que 0.03 % et ainsi de conforter l'idée de Big-Bang et d'une phase chaude et ionisée de l'univers primordial. Par ailleurs la température du corps noir a été mesurée avec une grande

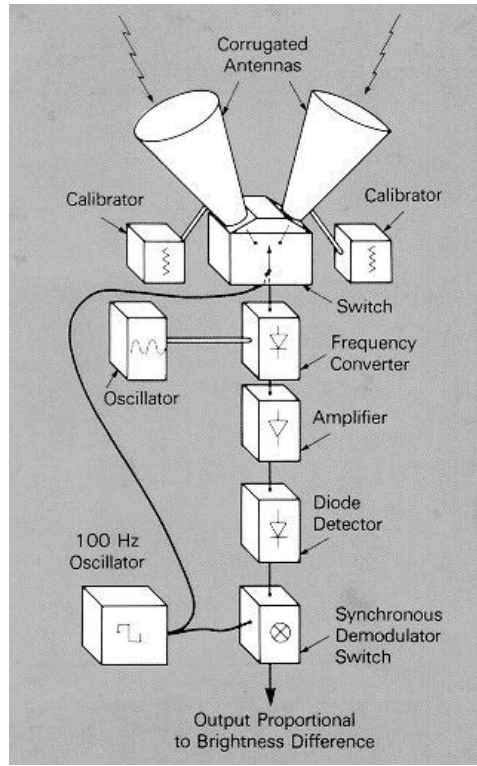


FIG. 3.10 – La chaîne de détection de COBE-DMR, comme exemple de chaîne de détection hétérodyne. Le rayonnement est capté par des antennes cornets. Dans le cas de COBE comme celui de MAP, c’est la différence de signal entre 2 points du ciel qui est transmise. Cette différence est ensuite déplacée en fréquence, puis amplifiée, et enfin détectée par les transistors HEMT.

précision (Fixsen & Mather (2002)) :

$$T_{CMB} = 2.725 \pm 0.001 \text{ K}$$

3.2.2 Boomerang

Description de l’expérience Boomerang est un instrument cryogénique embarqué à bord d’un ballon stratosphérique. la particularité de l’expérience Boomerang réside dans la stratégie des vols stratosphériques longue durée, technique maîtrisée par les américains pour les vols ballon autour du pôle sud. Les détecteurs sont des bolomètres refroidis à 270 mK par un réfrigérateur à Hélium 3. Les seize détecteurs embarqués couvrent des bandes de fréquence centrées sur 90, 150, 240 et 410 GHz. Le ballon a volé en décembre 1998-janvier 1999 (LDB-98), pendant 10 jours, autour du pôle sud. Les performances de l’instrument pendant ce vol sont résumées dans le tableau ci dessous :

COBE-DMR Map of CMB Anisotropy

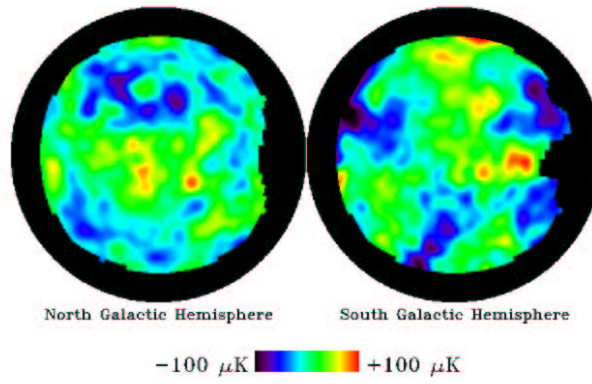


FIG. 3.11 – Carte des anisotropies de température obtenue par COBE-DMR en 4 années de prise de données.

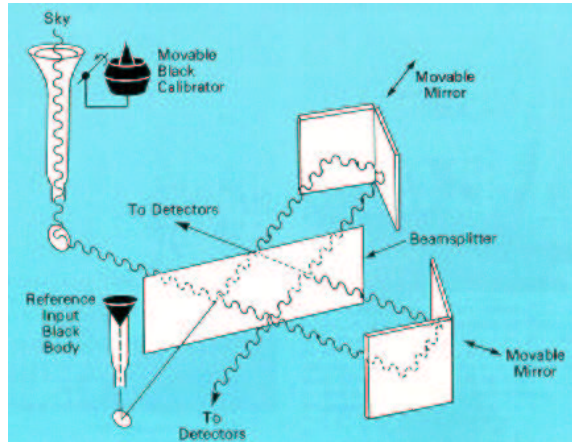


FIG. 3.12 – Schéma de principe du spectromètre FIRAS. La lumière du ciel est injectée dans un interféromètre de Michelson, pour être analysée. Un corps noir de référence est utilisé pour calibrer le rayonnement du fond diffus cosmologique.

Fréquence (GHz)	Résolution	NET ($\mu\text{K}/\sqrt{\text{Hz}}$)	bruit/pixel ($\mu\text{K}/\text{taille}_{\text{pix}}$)
90	19'	140	86/7'
150	10'	130	80/7'
240	14'	170	105/7'
410	13'	-	-

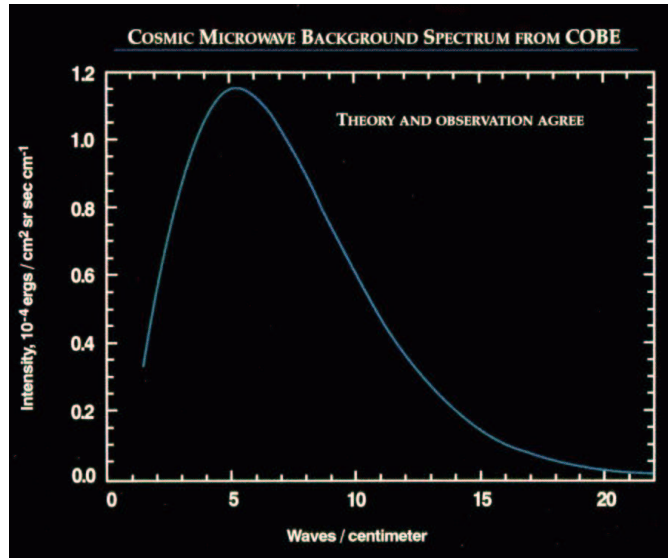


FIG. 3.13 – *Spectre du rayonnement de corps noir du fond diffus cosmologique. Sur cette courbe, on ne voit pas les erreurs de mesure car elles sont plus petites que la taille du trait.*

Les données du vol LDB-98 sont accessibles publiquement³

Résultats Boomerang a couvert une zone du ciel correspondant approximativement à 1800 deg^2 , ce qui représente 4% du ciel. On peut voir la carte des anisotropies de température obtenue par Boomerang sur la figure 3.14 (de Bernardis et al. 2000), ainsi que le spectre de puissance correspondant (fig. 3.15) (Netterfield et al. 2002).

3.2.3 MAXIMA

Description de l'expérience MAXIMA est, comme Boomerang, une expérience embarquée à bord d'un ballon stratosphérique. Les détecteurs sont des bolomètres refroidis par désaimantation adiabatique à 100 mK, rendant le bruit intrinsèque des détecteurs meilleur que celui de Boomerang. L'expérience embarque 16 bolomètres avec des bandes de détection centrées sur 150, 240 et 410 GHz. Elle a volé 2 fois, en 1998 (MAXIMA-1, 7h de vol) et en 1999 (MAXIMA-2, 12h de vol), mais seules les données du premier vol sont actuellement publiques⁴ (Hanany et al. 2000). Lors du premier vol, les performances suivantes ont été atteintes :

Fréquence (GHz)	Résolution	NET ($\mu K / \sqrt{Hz}$)	bruit/pixel ($\mu K / \text{taille}_{pix}$)
150	10'	80	100/3'

³<http://cmb.phys.cwru.edu/boomerang/>

⁴Les données complètes sont disponibles sur le site web : <http://cosmology.berkeley.edu/group/cmb/>

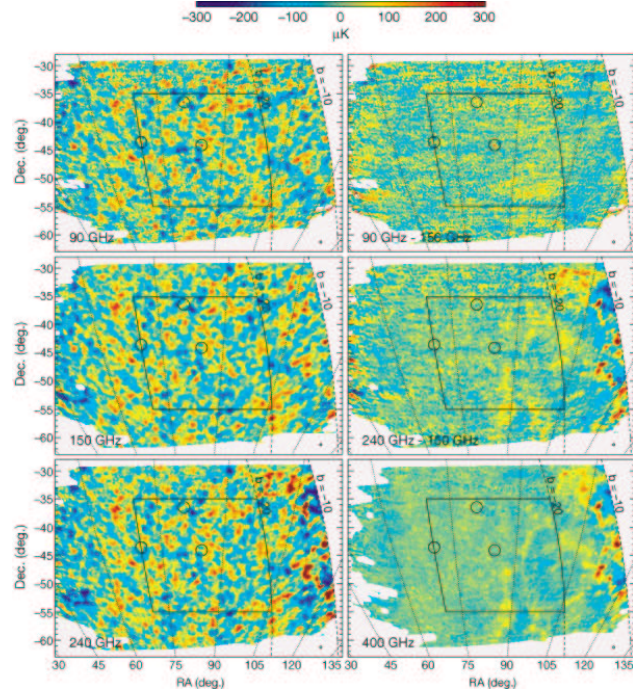


FIG. 3.14 – Carte des anisotropies de température observées par Boomerang lors du vol de 10 jours en décembre 1998. Cette carte correspond à 4% du ciel total.

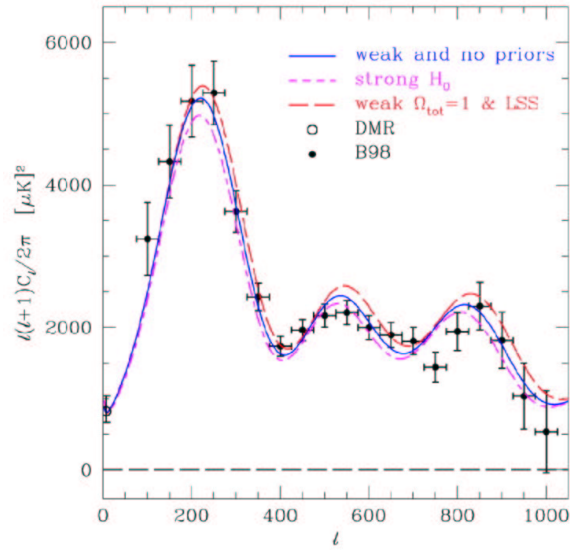


FIG. 3.15 – Spectre de puissance extrait de la carte des anisotropies de température superposé à des modèles cosmologiques (site web Boomerang).

Résultats La zone du ciel couverte par le balayage de MAXIMA représente 122 degrés^2 , soit 0.3% du ciel total. La carte des anisotropies de température

obtenue à partir de ces mesures est présentée sur la figure 3.16. Cette carte coïncide avec une partie de la couverture du ballon Archeops, ce qui rend possible des comparaisons entre le ciel observé par ces 2 expériences. Le spectre de puissance obtenu est présenté sur la figure 3.17 (Lee et al. 2001).

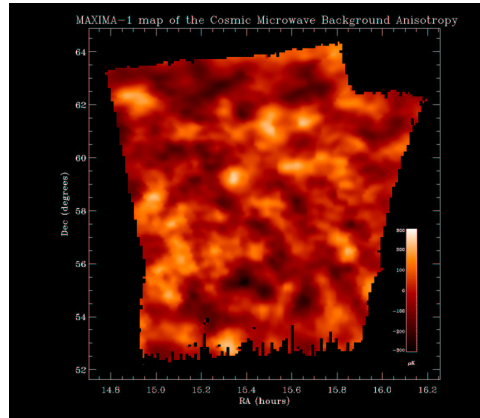


FIG. 3.16 – Carte des anisotropies de température observées par MAXIMA lors du vol MAXIMA-1 de 7h, en 1998. La carte a été lissée à une échelle angulaire de 1 degré (site web MAXIMA). Elle représente 0.3 % du ciel total.

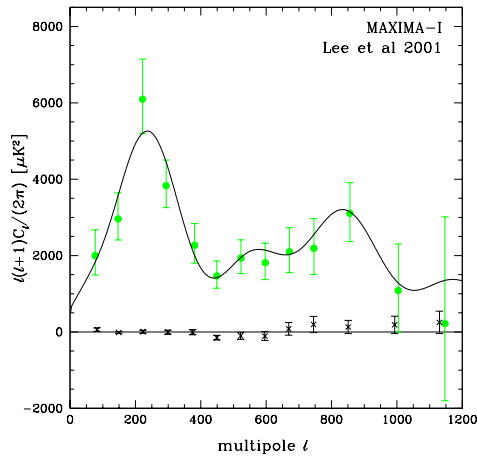


FIG. 3.17 – Spectre de puissance extrait des données MAXIMA (vol MAXIMA-1 de 7h en 1998) (site web Maxima).

3.2.4 Les expériences interférométriques : DASI, VSA et CBI

Ces trois expériences sont des interféromètres au sol. Cette situation permet un temps d'intégration plus long, mais une pollution atmosphérique plus importante que pour les vols en ballons ou pour les satellites. Ces trois

instruments utilisent la technologie hétérodyne (cf §3.1.1), dans une bande de fréquence de 26 à 36 GHz.

DASI DASI⁵ (pour Degree Angular Scale Interferometer) est un interféromètre composé de 13 antennes et basé au pôle sud. Les observations des anisotropies de température ont été effectuées durant les années 1999 et 2000. Les cartes des anisotropies de température et le spectre de puissance mesurés sont présentés sur les figures 3.18 et 3.19 (Halverson et al. 2002). DASI a aussi obtenu récemment des résultats sur la polarisation du fond diffus cosmologique (voir §3.3.1).

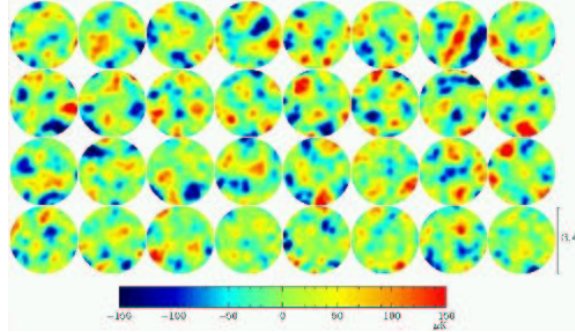


FIG. 3.18 – *Anisotropies de température observées par DASI.*

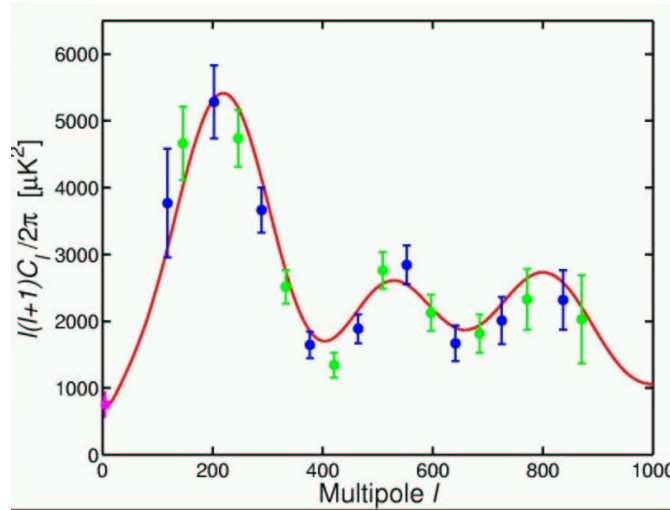


FIG. 3.19 – *Spectre de puissance estimé par DASI. La figure présente 2 spectres de puissance (en rouge et en bleu) correspondant à 2 binning identiques et décalés, afin de tester la robustesse de l'analyse.*

⁵site web : <http://astro.uchicago.edu/dasi/>

VSA VSA⁶ (Very Small Array) est un interféromètre basé à Tenerife, composé de 14 antennes. Les résultats d'un an de prise de données ont été publiés en mai 2002, puis en décembre 2002 (Taylor et al. 2003). Ils sont présentés sur les figures 3.20 et 3.21 qui montrent respectivement un champ observé par VSA et le spectre de puissance obtenu.

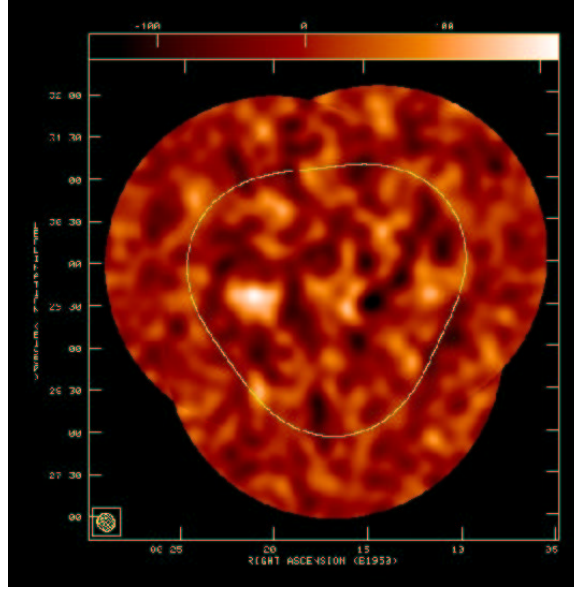


FIG. 3.20 – *Anisotropies de température observées par VSA.*

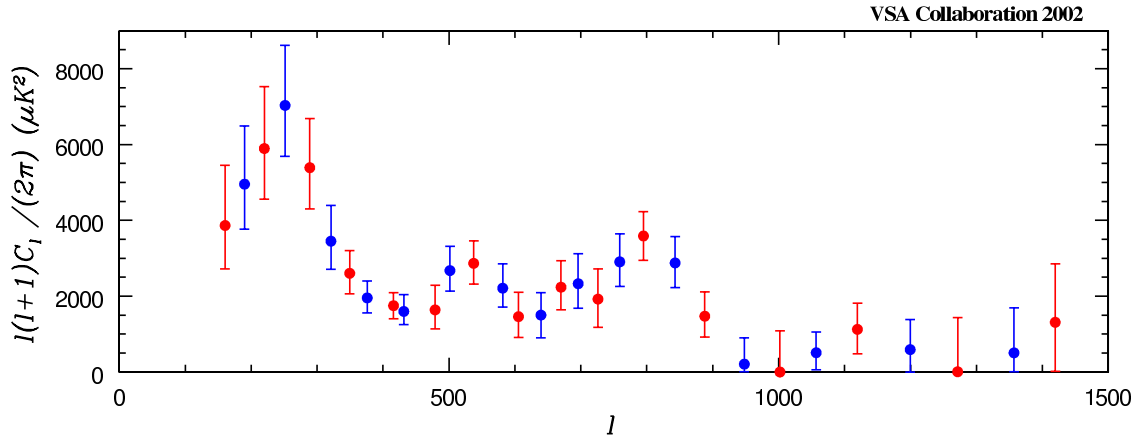


FIG. 3.21 – *Spectre de puissance estimé par VSA. La figure présente 2 spectres de puissance (en rouge et en bleu) correspondant à 2 binning identiques et décalés, afin de tester la robustesse de l'analyse.*

⁶site web : <http://www.mrao.cam.ac.uk/telescopes/vsa/>

CBI CBI⁷(Cosmic Background Imager) est un interféromètre composé de 13 antennes et basé au Chili, à 5000 m d'altitude. Le champ de vue de l'instrument est de 44' et la résolution est comprise entre 4.5' et 10'. Les données publiées correspondent à des observations entre le 11 janvier et le 12 décembre 2000. Les figures 3.22 et 3.23 résument les résultats obtenus par CBI et qui sont discutés en détail dans (Pearson et al. 2003) et (Mason et al. 2003).

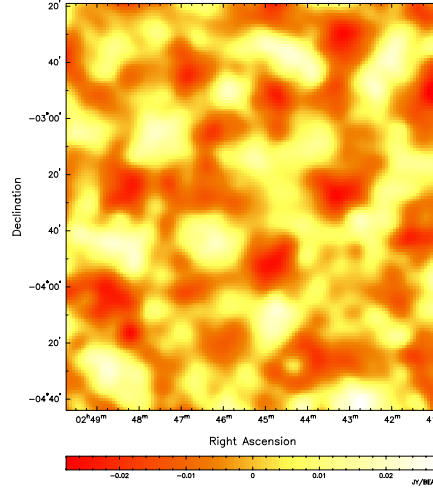


FIG. 3.22 – *Anisotropies de température observées par CBI dans un des champs observés pas l'interféromètre. Le champ couvert représente un carré de deux degrés de coté.*

3.3 Les expériences présentes et futures

3.3.1 Expériences sur la polarisation

Je mentionne rapidement les expériences de détection de la polarisation qui sont une voie d'avenir pour permettre de s'affranchir des dégénérescences entre les différents paramètres cosmologiques présentes dans l'étude du spectre de puissance des anisotropies de température. Actuellement, deux expériences ont détecté un signal polarisé : MAP et DASI (Kovac et al. 2002). On peut voir sur la figure 3.28 (en bas) les résultats de MAP qui viennent de la corrélation entre les données de température et celles de polarisation (spectre TE). Sur la figure 3.24 on voit le résultat de DASI sur la polarisation dans le mode E, en terme de spectre de puissance.

3.3.2 WMAP

Description de l'expérience WMAP, pour Wilkinson Microwave Anisotropy Probe⁸, est un satellite financé par la NASA. Le concept à la base

⁷site web : <http://www.astro.caltech.edu/~tjp/CBI/>

⁸<http://map.gsfc.nasa.gov/>

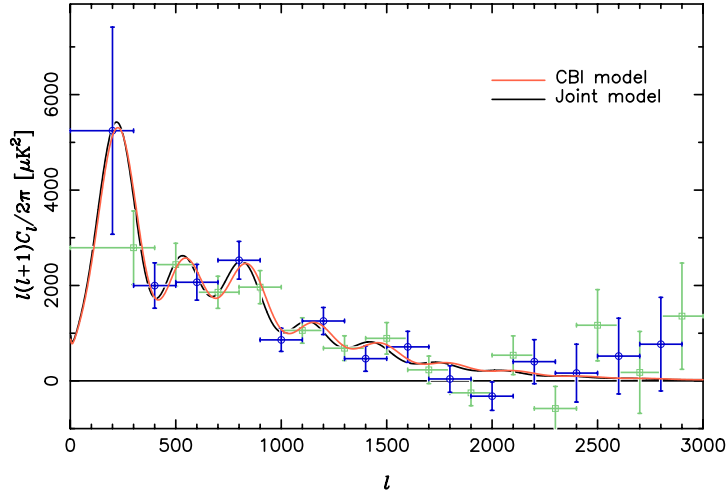


FIG. 3.23 – *Spectre de puissance estimé par CBI. La figure présente deux spectres de puissance (en bleu et en vert) correspondant à deux binning identiques décalés, afin de tester la robustesse de l'analyse. deux spectres de puissance theoriques (en noir et en rouge) sont superposés aux données.*

du satellite est le même que celui de l'instrument DMR de COBE, un radiomètre différentiel. Le satellite occupe le point de Lagrange L2 du système terre-soleil (fig. 3.25). Il tourne le “dos”, équipé de panneaux solaires, au soleil. Ce positionnement offre plusieurs avantages :

- stabilité thermique de l'environnement du satellite,
- champ de vue dépourvu de radiations solaires parasites,
- source d'énergie, via les panneaux solaires.

Les détecteurs sont des radiomètres opérant des différences sur le ciel, comme dans le cas de DMR 3.10. La chaîne de détection est décrite sur la figure 3.26

Le satellite a été lancé fin juin 2001, puis est arrivé au point de Lagrange L2 en octobre 2001. Depuis octobre 2001 le satellite prend des données, et les premières données ont été publiées en février 2003, couvrant un an complet d'observations.

Pour la première année de données, l'instrument WMAP a atteint les performances suivantes (Jarosik et al.(2003)) :

Fréquence (GHz)	Résolution	NET ($\mu K/\sqrt{Hz}$)	bruit/pixel ($\mu K/taille_{pix}$)
22.8	0.82 °	700	39/20'
33	0.62 °	710	40/20'
40.7	0.49 °	900	41/20'
60.8	0.33 °	1100	48/20'
93.5	0.21 °	1600	46/20'

Résultats WMAP donne les mesures les plus précises du fond diffus cosmologique aux échelles plus grandes que le degré ($\ell < 200$) (Bennett et al.

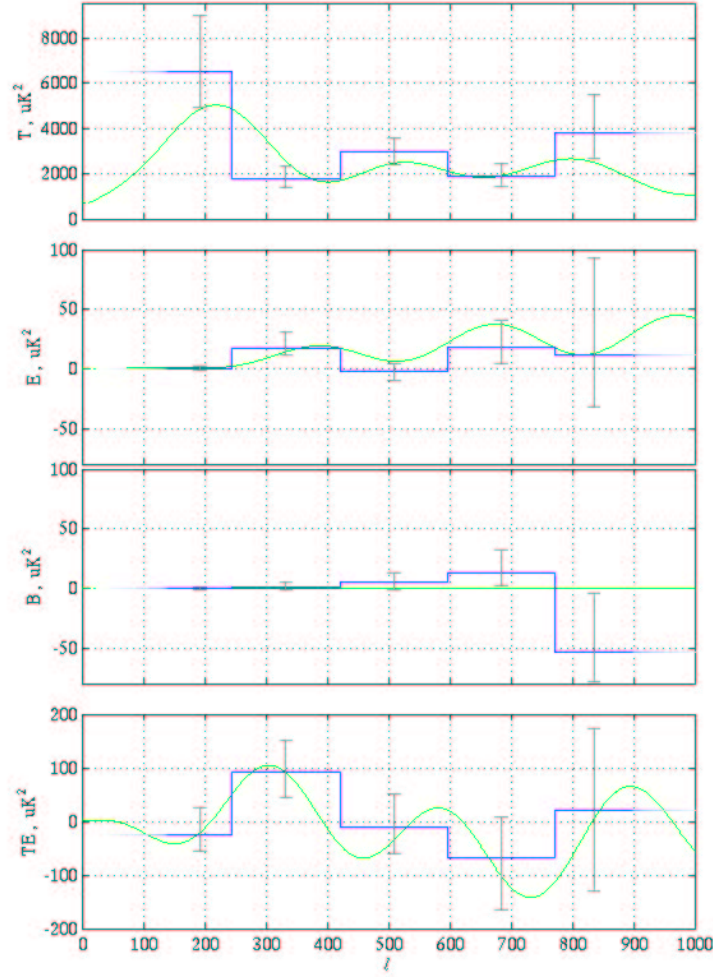


FIG. 3.24 – *Spectre de puissance des anisotropies de polarisation et de température du fond diffus observé par DASI.*

2003). La grande couverture du ciel permet de mesurer les multipoles les plus bas et de les comparer aux valeurs données par COBE en 1992.

3.3.3 Archeops

Instrument Archeops⁹ est un instrument embarqué à bord d'un ballon stratosphérique, au même titre que Boomerang et MAXIMA. L'instrument est composé de 21 détecteurs bolométriques aux fréquences suivantes : 143, 217, 353 et 545 GHz. Les bolomètres et le système optique, le système de refroidissement et l'électronique utilisés pour Archeops sont similaires à ceux de l'instrument haute fréquence de Planck. Le système de refroidissement, consiste en un cryostat à dilution qui permet d'atteindre la température de 100 mK (Madet 2002). Ce cryostat fonctionne en utilisant le fait qu'un

⁹<http://www.archeops.org>

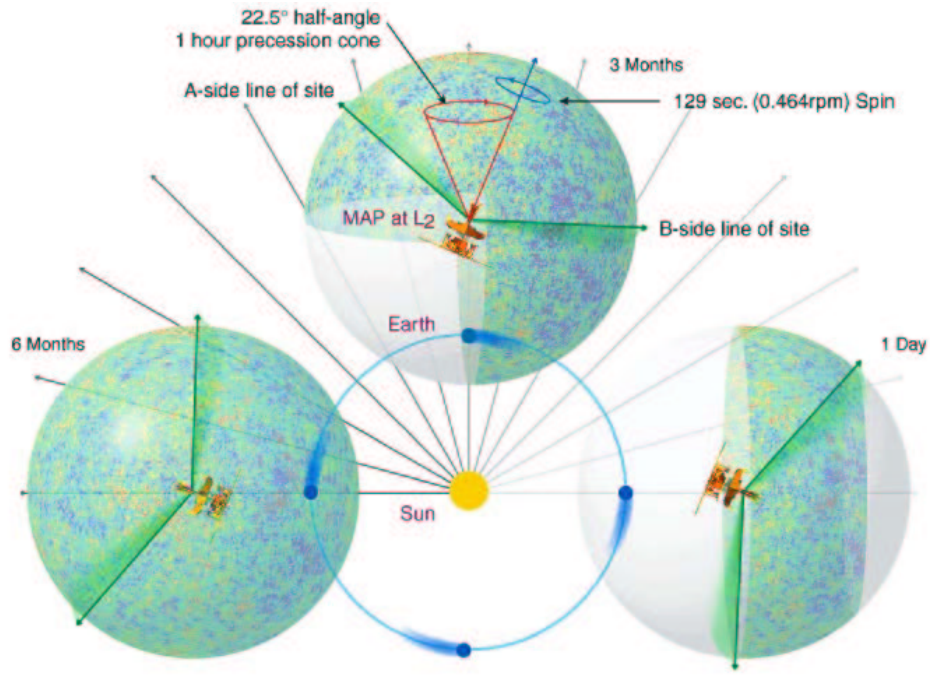


FIG. 3.25 – Description de la position et de la stratégie de balayage de WMAP. Le satellite est positionné au point de Lagrange L_2 du système Soleil-Terre. Le satellite tourne sur lui-même à une vitesse d'un tour toutes les 2 minutes, avec un mouvement de précession d'une période d'une heure. Enfin le satellite est entraîné autour du soleil à la même vitesse angulaire que la Terre, ce qui permet une couverture complète du ciel en 6 mois.

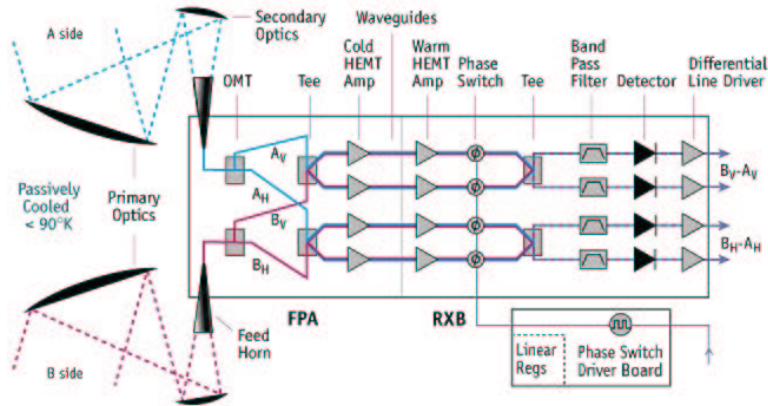


FIG. 3.26 – Chaîne de détection schématique de WMAP. Le principe est le même que pour l'instrument DMR de COBE. Le rayonnement venant de chacun des côtés des paires de cornets (A et B) est séparé en 2 composantes polarisées (A en A_H et A_V , B en B_H et B_V). Les ondes polarisées sont ensuite soustraites l'une à l'autre, puis amplifiées et détectées.

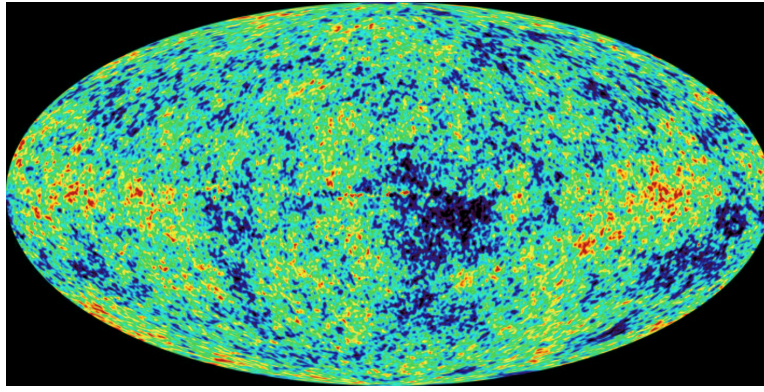


FIG. 3.27 – *Carte des anisotropies de températures obtenue par le satellite WMAP en une année de prises de données.*

mélange d'Helium 3 et d'Helium 4 est constitué de 2 phases, une phase diluée et une phase concentrée. Le passage de l'Helium 3 de la phase concentrée à la phase diluée entraîne une baisse de la température du mélange.

Le télescope utilisé est un télescope Grégorien (hors axe) avec un miroir primaire de 1m50 de diamètre. L'axe de visée du télescope est incliné de 41 degrés par rapport à l'axe de rotation de la nacelle (figure 3.29). Le système optique est composé de cornets qui permettent de coupler le télescope aux bolomètres (figures 3.30 et 3.31). Ces cornets sont des guides d'ondes pour les ondes millimétriques étudiées. Leur forme profilée et les corrugations internes des cornets sont calculées pour assurer une transmission optimale de l'optique, ainsi qu'un lobe de détection le plus petit possible, c'est à dire limité par la diffraction du télescope. Par ailleurs, des filtres sont utilisés pour définir les bandes de fréquences, les bolomètres étant des détecteurs non selectifs en fréquence.

Les 6 bolomètres à 353 GHz sont couplés par paires afin de mesurer le rayonnement polarisé des poussières galactiques. Enfin, la nacelle est équipée d'un senseur stellaire, un télescope optique de 40 cm de diamètre, qui permet de reconstruire la direction de pointage des observations au cours du vol (Bourrachot 2003).

Contrairement aux observations de MAXIMA et Boomerang, qui sont faites en couvrant une faible portion du ciel, les observations d'Archeops sont faites en faisant tourner la nacelle autour de son axe. La direction de visée décrit donc des cercles sur le ciel, le centre des cercles se décalant progressivement lors de la rotation de la Terre et du déplacement du ballon (voir figure 3.33).

Le vol test de Trapani en 1999 Le premier vol de l'instrument Archeops a eu lieu à Trapani en 1999, ceci afin de tester la partie technique de l'expérience (l'ensemble cryostat/bolomètres) (Benoît et al. 2002). Le vol a duré 4h, l'instrument embarquait alors six bolomètres, trois pour la bande centrée sur 143 GHz, deux pour la bande centrée sur 217 GHz, et un pour la bande centrée sur 353 GHz. Les performances suivantes ont été atteintes

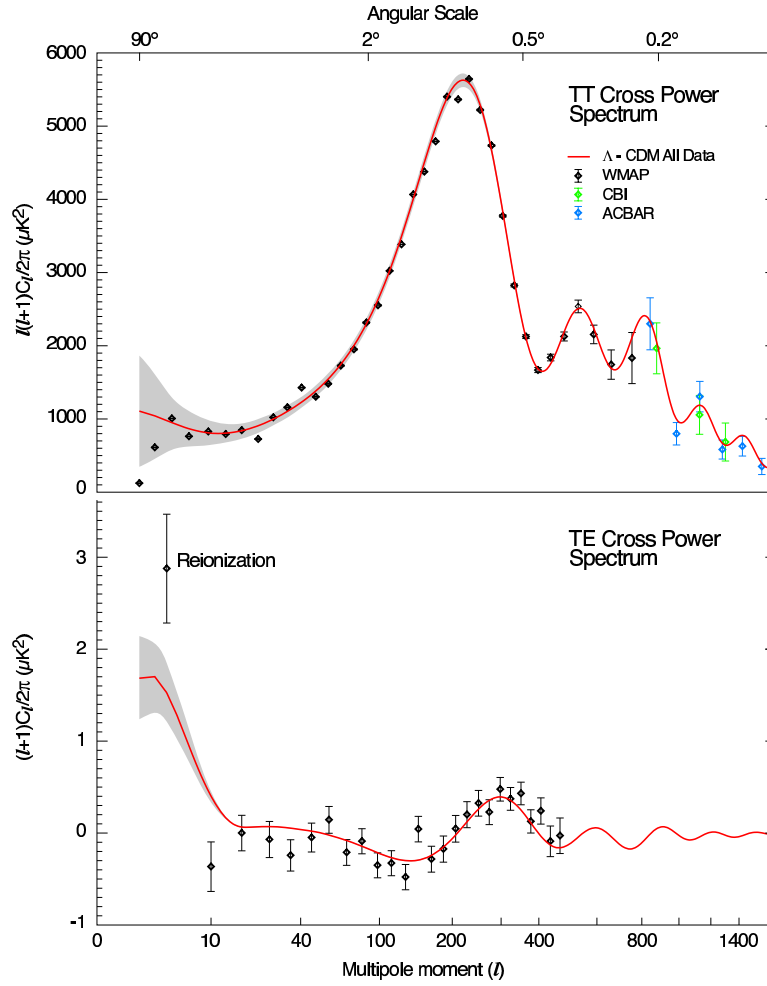


FIG. 3.28 – *Spectre de puissance obtenu par WMAP. Haut : Spectre de puissance des anisotropies de température, présentant les oscillations acoustiques de $\ell = 2$ à $\ell \simeq 1000$. Bas : Spectre croisé des anisotropies de température et de polarisation. La puissance à grande échelle $\ell < 10$ est interprétée comme un signe de la reionisation de l'univers.*

pour ce vol (pour un détecteur typique, dans chacune des voies) :

Fréquence (GHz)	Résolution	NET ($\mu K/\sqrt{Hz}$)
143	11'	220
217	12'	190
353	10'	740

Enfin la couverture du ciel lors de ce vol représente 19% du ciel total.

Le premier vol scientifique à Kiruna (KS1) L'instrument Archeops a volé lors d'une première campagne scientifique en 2000-2001 à laquelle j'ai participé, avec pour résultat un vol de 7h en janvier 2001 et dont les résultats sont non publiés pour l'instant. Lors de ce vol, 22 bolomètres ont

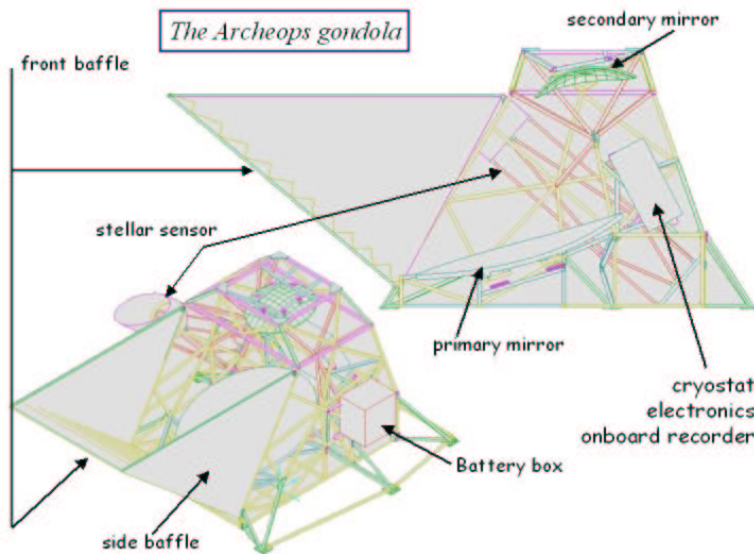


FIG. 3.29 – *Image de la nacelle d'Archeops.*

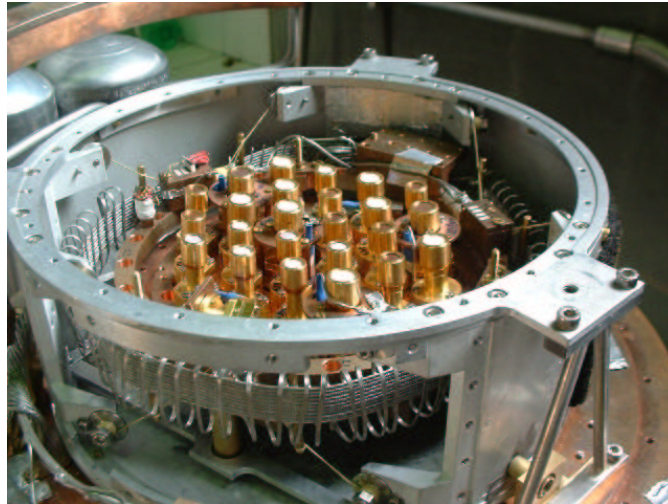


FIG. 3.30 – *Vue du plan focal d'Archeops. On peut y voir les derniers cornets amenant la lumière aux bolomètres. Les pastilles blanches visibles à l'entrée de chaque voie sont des filtres utilisés pour définir la bande de fréquence du détecteur. On voit aussi sur la photo les capillaires entourant le plan focal et dans lesquels se produit la dilution responsable de la température de 100 mK.*

été utilisés, dans des bandes centrées sur 143, 217, 353 et 545 GHz. Leur sensibilité est de l'ordre de $120 \mu K_{CMB}$ (Benoît 2001).

Le deuxième vol scientifique à Kiruna (KS3) Une deuxième campagne en 2001-2002, a permis d'obtenir 12h30 de données en février 2002. Les données de ce deuxième vol ont été analysées (Benoît et al. 2003) et l'on

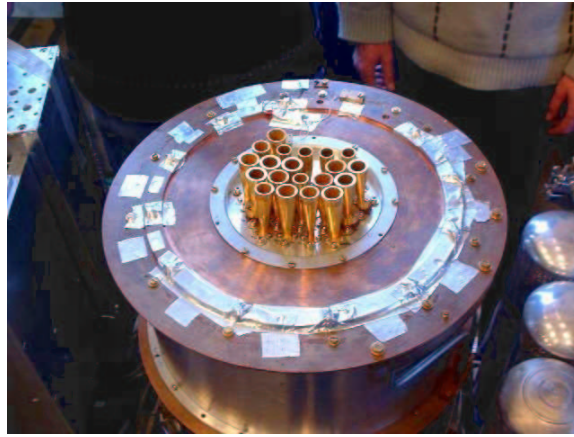


FIG. 3.31 – Vue des cornets dits “back-to-back” qui couplent le rayonnement venant du télescope aux bolomètres. L’intérieur de ces cornets est corrugué afin d’optimiser la transmission. La forme profilée des cornets permet de limiter l’étendue du lobe de chaque détecteur.

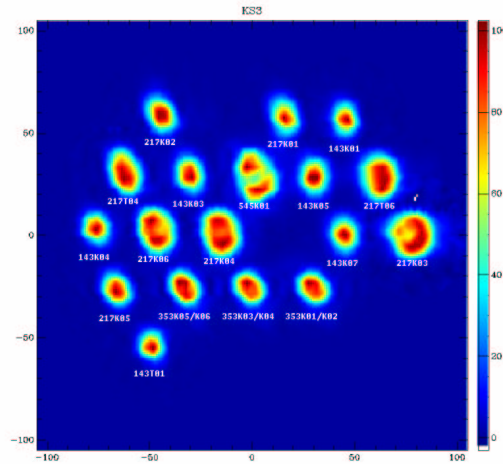


FIG. 3.32 – La réponse des détecteurs du plan focal d’Archeops, mesurée grâce à Jupiter. Cette mesure, qui est aussi effectuée au sol, permet de connaître la forme des lobes de l’instrument.

peut voir les premiers résultats concernant les anisotropies de température sur les figures 3.33 et 3.34. La portion de ciel couverte représente 30 % du ciel total. Les performances de l’instrument sont décrites dans (Benoît et al. 2004) et résumées dans le tableau suivant :

Fréquence (GHz)	Résolution	NET ($\mu K_{CMB}/\sqrt{Hz}$)	bruit/pixel ($\mu K_{CMB}/taille_{pix}$)
143		130	98/20'
217		210	144/20'
353		2400	1312/20'
545		9000	10251/20'

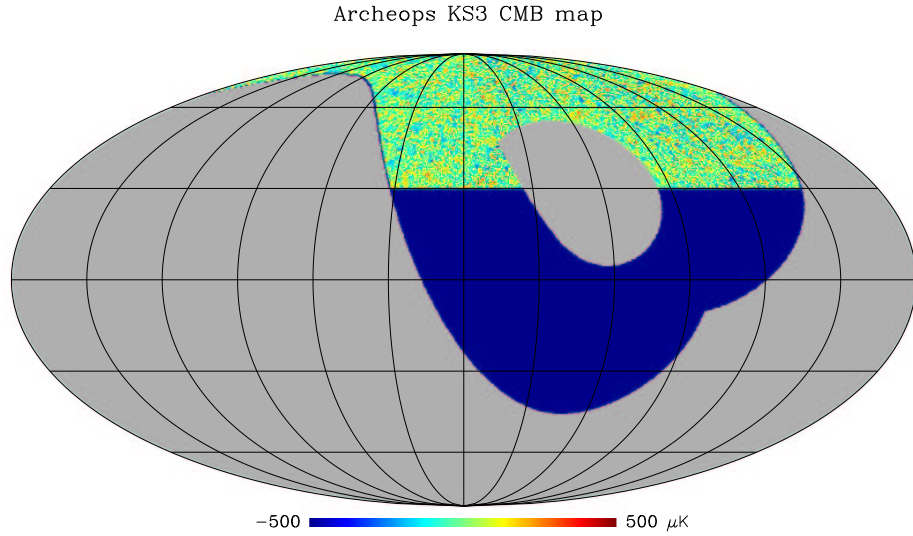


FIG. 3.33 – *Carte des anisotropies de température obtenue par l'instrument Archeops.*

Une étude de la polarisation du plan galactique a été effectuée avec les mesures des bolomètres à 353 GHz. Cette étude a produit la carte la plus détaillée du plan galactique aux fréquences couvertes par archeops (Benoît et al. 2003 (II)).

3.3.4 Planck-HFI

Planck est un satellite de l'agence spatiale européenne (ESA) qui comporte 2 instruments, un instrument basse fréquence (Low Frequency Instrument) semblable dans son principe de détection à MAP, et un instrument haute fréquence (High Frequency Instrument).

Le système de détection de Planck-HFI est identique à celui d'Archeops. Les mêmes bolomètres, la même optique, la même électronique sont utilisés. Le système de refroidissement des bolomètres est aussi commun avec Archeops. Le nombre de bolomètres est de 48, repartis sur 6 fréquences : 100, 143, 217, 353, 545 et 857 GHz. Cette couverture spectrale est destinée à contraindre au maximum la physique des avants plans qui biaisent les analyses des anisotropies du fond diffus, et qui constitue un sujet d'étude à part entière :

- l'émission de la poussière galactique, même en dehors du plan galactique,

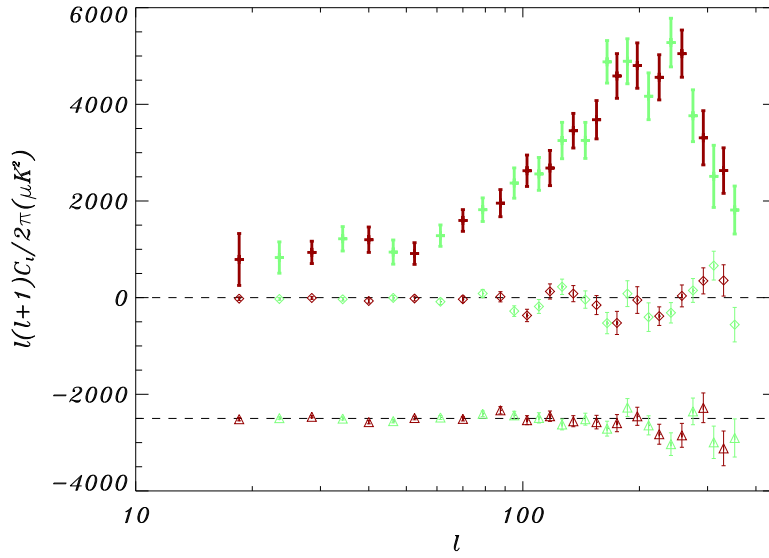


FIG. 3.34 – *Spectre de puissance des anisotropies du fond diffus observé par Archeops. La figure présente 2 spectres de puissance (en rouge et en vert) correspondant à 2 binning identiques et décalés, afin de tester la robustesse de l'analyse.*

- l'effet Sunyaev-Zel'dovich,
- les sources extragalactiques de rayonnement submillimétrique.

Les performances attendues des détecteurs de Planck-HFI sont résumées dans la table 3.3.4 (Lamarre et al.(2003)).

Fréq (GHz)	Résol (FWHM)	Nb détec (non pol/pol)	br/pix (non pol;pol) ($\mu K/taille_{pix}$)
100	9.2'	0/8	2.8/9.2' ; 4/9.2'
143	7.1'	4/8	2.2/7.1' ; 4.2/7.1'
217	5'	4/8	4.8/5' ; 9.8/5'
353	5'	4/8	15/5' ; 30/5'
545	5'	4/0	147/5'
857	5'	4/0	6700/5'

Ces performances doivent permettre une détermination très précise des spectres de puissance des anisotropies de température et des spectres de puissance de la polarisation du fond diffus (voir figure 3.35).

3.3.5 Planck-LFI

L'instrument Planck-LFI est un instrument similaire à WMAP dans sa conception. Il comprend 56 détecteurs aux fréquences suivantes : 30, 44, 70 et 100 GHz (Sandri et al. 2004). Les caractéristiques des détecteurs sont données dans la table 3.3.5.

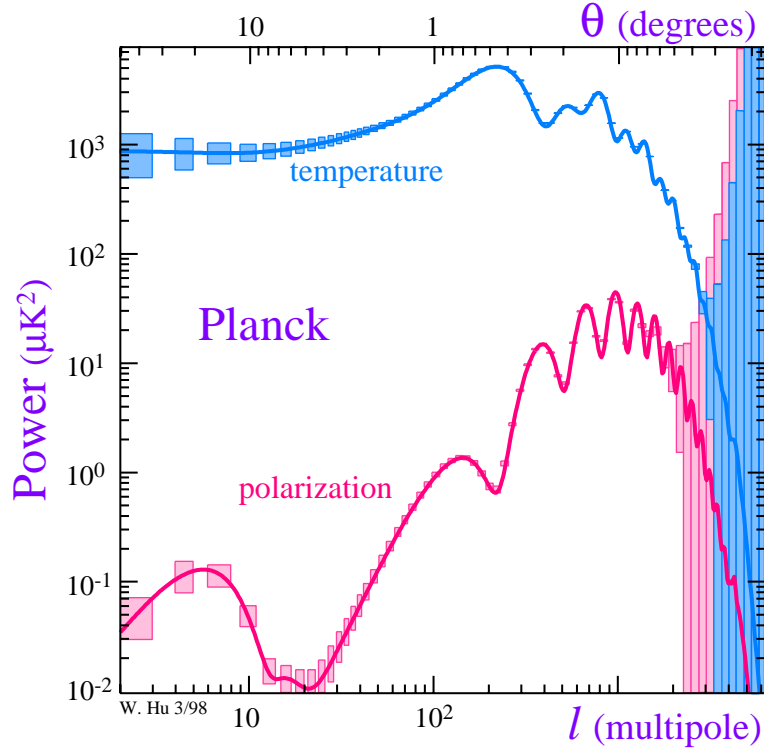


FIG. 3.35 – *Simulation du spectre de puissance des anisotropies de polarisation (modes EE) et de température du fond diffus observés par Planck (tiré de <http://background.uchicago.edu/~whu/>).*

Fréq (GHz)	Résol (FWHM)	Nb détec	br/pix ($\mu K / \text{taille}_{pix}$)
30	33'	4	2.8/9.2' ; 4/33'
44	23'	6	2.2/7.1' ; 7/23'
70	14'	12	4.8/5' ; 10/14'
100	10'	34	15/5' ; 12/10'

3.4 Résumé des caractéristiques et des résultats des expériences

3.4.1 Caractéristiques expérimentales

Le tableau suivant résume les caractéristiques expérimentales des instruments décrits dans ce chapitre :

Exp.	Fréq (GHz)	Rés (FWHM)	br/pix ($\mu K/taille_{pix}$)
Boomerang	90	19'	86/7'
	150	10'	80/7'
	240	14'	105/7'
	410	13'	
MAXIMA	150	10'	100/3'
Archeops	143		98/20'
	217		144/20'
	353		1312/20'
	545		10251/20'
WMAP	22.8	0.82 °	39/20'
	33	0.62 °	40/20'
	40.7	0.49 °	41/20'
	60.8	0.33 °	48/20'
	93.5	0.21 °	46/20'
Planck	100	10.7'	4.6/10'
	143	8.0'	5.45/8'
	217	5.5'	11.7/5.5'
	353	5.0'	39.24/5'
	545	5.0'	400/5'
	857	5.0'	18175/5'

3.4.2 Résultats

Les figures 3.36 et 3.37 résument les résultats des dernières expériences sur les anisotropies de température du fond diffus cosmologique et représentent l'état actuel des données.

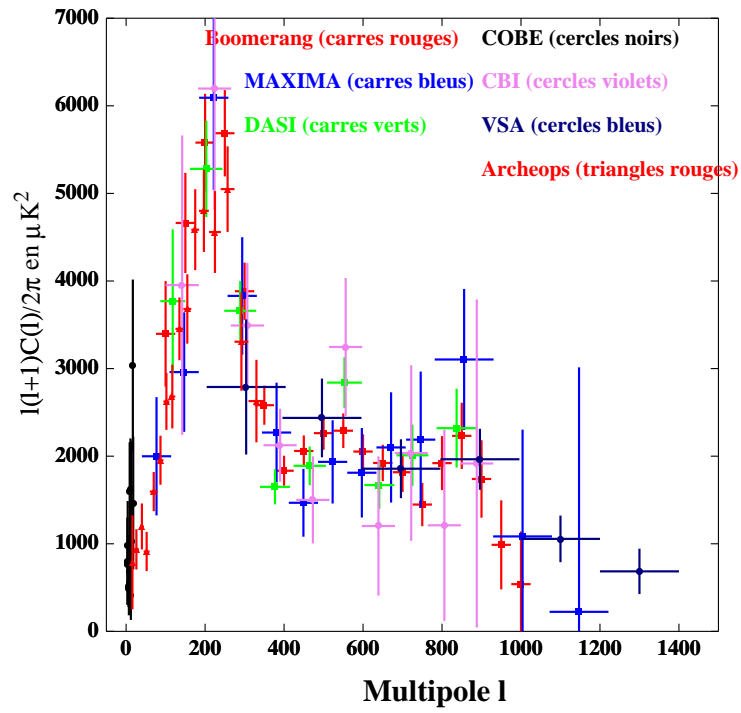


FIG. 3.36 – *Spectre de puissance des anisotropies de température du fond diffus observé avant WMAP.*

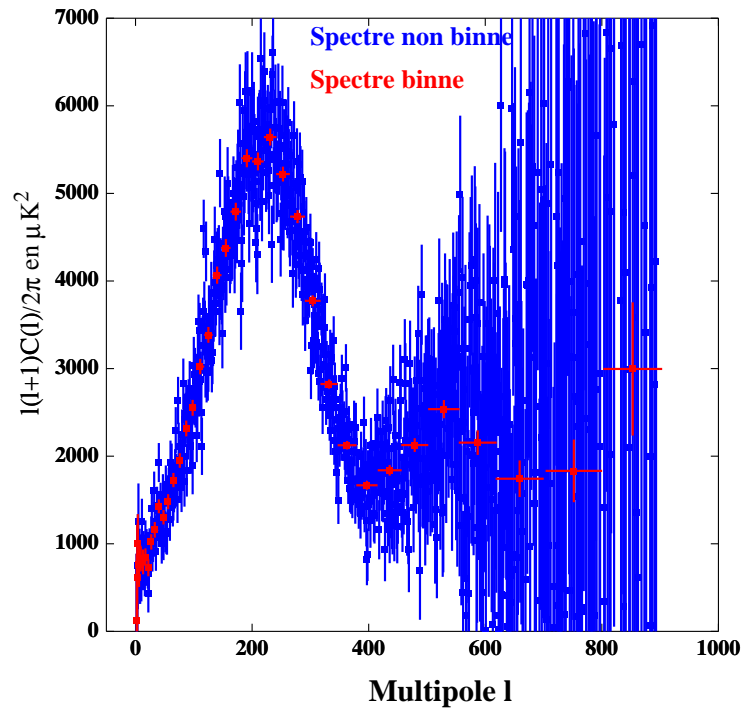


FIG. 3.37 – *Spectre de puissance des anisotropies de température du fond diffus observé par WMAP.*

Bibliographie

- Bennett, C. L. et al. 2003, *Astrophysical Journal Supplement*, 148, 1
- Benoît, A. et al. 2002, *Astroparticle Physics*, 17, 101
- Benoît, A. et al. 2003, *Astronomy & Astrophysics*, 399, L19
- Benoît, A. et al. 2003, en préparation
- Benoît, A. et al. 2003 (II), *Astronomy & Astrophysics*, article accepté.
- Benoît, A., Photometry, internal collaboration note, 2001
- Bourrachot A., *Contribution à l'analyse des données d'Archéops et à la mesure de la masse des neutrinos avec les expériences CMB.*, Thèse de doctorat, Université Paris Sud, Orsay, 2004
- P. de Bernardis, S. Masi, CMB anisotropy measurements using stratospheric balloons, in "Fundamental parameters in Cosmology", Rencontres de Moriond, 1998, astro-ph/9804138
- de Bernardis, P., et al. 2000, *Nature*, 404, 955
- Fixsen, D. J. et al. 1994, *Astrophysical Journal*, 420, 445
- Fixsen, D. J. & Mather, J. C. 2002, *Astrophysical Journal*, 581, 817
- Gorski, K. M., Banday, A. J., Bennett, C. L., Hinshaw, G., Kogut, A., Smoot, G. F., & Wright, E. L. 1996, *Astrophysical Journal Letters*, 464, L11
- Halverson, N. W. et al. 2002, *Astrophysical Journal*, 568, 38
- Hamilton J.C., Conversion between brightness temperature and thermodynamic temperature, internal collaboration note, 2000
- Hanany, S. et al. 2000, *Astrophysical Journal Letters*, 545, L5
- Hauser, M. G. et al. 1998, *Astrophysical Journal*, 508, 25
- Jarosik, N. et al. 2003, *Astrophysical Journal Supplement*, 148, 29
- Kovac, J. M., Leitch, E. M., Pryke, C., Carlstrom, J. E., Halverson, N. W., & Holzapfel, W. L. 2002, *Nature*, 420, 772
- A.N. Lasenby, A.W. Jones, Y. Dabrowski, Review of Ground-Based CMB Experiments, In proceedings of the Moriond Workshop "Fundamental Parameters in Cosmology", 1998, astro-ph/9810175
- Lee, A. T. et al. 2001, *Astrophysical Journal Letters*, 561, L1
- Léna P., "Méthodes physiques de l'observation", 1996, CNRS éditions
- Madet K., *Mesure du rayonnement Cosmologique : Préparation et étalonnage des instruments Archeops et Planck*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2002

- Mason, B. S. et al. 2003, *Astrophysical Journal*, 591, 540
- Mather, J. C., Fixsen, D. J., & Shafer, R. A. 1993, *Proc.Spie*, 2019, 168
- Netterfield, C. B. et al. 2002, *Astrophysical Journal*, 571, 604
- Partridge, R. B. 1995, *3K : The Cosmic Microwave Background Radiation*, ISBN 0521352541, Cambridge Astrophysics Series, Cambridge, New York : Cambridge University Press, 1995
- Pearson, T. J. et al. 2003, *Astrophysical Journal*, 591, 556
- astro-ph/0308075 “The Planck High Frequency Instrument, a 3rd generation CMB experiment, and a full sky submillimeter survey” J.M. Lamarre, J.L. Puget, F. Bouchet, P.A.R. Ade, A. Benoit, J.P. Bernard, J. Bock, P. De Bernardis, J. Charra, F. Couchot, J. Delabrouille, G. Efstathiou, M. Giard, G. Guyot, A. Lange, B. Maffei, A. Murphy, F. Pajot, M. Piat, I. Ristorcelli, D. Santos, R. Sudiwala, J.F. Sygnet, J.P. Torre, V. Yurchenko, D. Yvon, *Proceedings du workshop ”The Cosmic Microwave Background and its Polarization”*, *New Astronomy Reviews*, (eds., S. Hanany and R.A. Olive)
- Sandri, M., et al. 2004, *Memorie della Societa Astronomica Italiana Supplement*, 5, 411
- Smoot, G. et al. 1990, *Astrophysical Journal*, 360, 685
- Smoot, G. F. et al. 1992, *Astrophysical Journal Letters*, 396, L1
- Taylor, A. C. et al. 2003, *MNRAS*, 341, 1066

Chapitre 4

Méthodes pour l'estimation des paramètres cosmologiques à partir de la courbe de C_ℓ

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le spectre de C_ℓ dépend de nombreux paramètres, et donc qu'une bonne estimation de ce spectre permet une détermination des paramètres cosmologiques. Nous verrons dans ce chapitre comment, dans un premier temps, reconstruire les cartes de fluctuations de température sur le ciel (§4.1), puis, comment estimer le spectre de puissance à partir de ces cartes (§4.2). Enfin, comment on estime les paramètres cosmologiques à partir du spectre de puissance (§4.3). Je ferai aussi le point sur les différentes méthodes actuellement utilisées pour l'estimation des paramètres cosmologiques (§4.3.2)

4.1 Reconstruction des cartes de température

Cette partie est directement tirée de (Hamilton 2000). On suppose que les données ordonnées en temps (TOI pour time ordered data) \mathbf{d} (N_d échantillons) sont obtenues en parcourant le ciel \mathbf{S} (N_{ciel}) avec une stratégie de pointage représentée par la matrice A ($N_d \times N_{ciel}$) et en ajoutant un bruit gaussien \mathbf{n} :

$$\mathbf{d} = A\mathbf{S} + \mathbf{n}.$$

\mathbf{S} est le ciel vu à travers l'instrument, et est donc déjà le ciel vrai convolué par le lobe de l'instrument et la pixelisation de la carte. On suppose que la matrice de covariance du bruit est donnée par :

$$N_{tt'} = \langle \mathbf{n}\mathbf{n}^t \rangle.$$

Etant donnée la matrice de covariance, la probabilité d'une TOI \mathbf{n} de bruit est donnée par :

$$P(\mathbf{n}) = \frac{1}{|2\pi N_{tt'}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{n}N_{tt'}^{-1}\mathbf{n}^t\right)$$

La probabilité d'obtenir les données \mathbf{d} étant donné le ciel \mathbf{S} est alors :

$$P(\mathbf{d}|\mathbf{S}) = \frac{1}{|2\pi N_{tt'}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{d} - A\mathbf{S})^T N_{tt'}^{-1}(\mathbf{d} - A\mathbf{S}) \right] \quad (4.1)$$

D'après le théorème de Bayes, on a :

$$P(\mathbf{S}|\mathbf{d}) \propto P(\mathbf{d}|\mathbf{S}) \times P(\mathbf{S})$$

Si l'on a aucun à priori sur le ciel \mathbf{S} , $P(\mathbf{S}) = 1$ et dans ce cas :

$$P(\mathbf{S}|\mathbf{d}) = P(\mathbf{d}|\mathbf{S}) \quad (4.2)$$

$$= \frac{1}{|2\pi N_{tt'}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{d} - A\mathbf{S})^T N_{tt'}^{-1}(\mathbf{d} - A\mathbf{S}) \right] \quad (4.3)$$

Maximiser cette probabilité revient à minimiser le χ^2 :

$$\chi^2 = -2 \ln[P(\mathbf{S}|\mathbf{d})] = (\mathbf{d} - A\mathbf{S})^T N_{tt'}^{-1}(\mathbf{d} - A\mathbf{S}), \quad (4.4)$$

à une constante près. En résolvant $\frac{\partial \chi^2}{\partial \mathbf{S}^T} = 0$, on obtient la solution suivante :

$$A^T N_{tt'}^{-1} A \mathbf{S} = A^T N_{tt'}^{-1} \mathbf{d} \quad (4.5)$$

Ce qui donne pour l'estimateur $\tilde{\mathbf{S}}$ de \mathbf{S} :

$$\tilde{\mathbf{S}} = (A^T N_{tt'}^{-1} A)^{-1} A^T N_{tt'}^{-1} \mathbf{d}. \quad (4.6)$$

Ces formules sont valables dans les cas d'un bruit gaussien seulement. Par ailleurs, la taille de la matrice $N_{tt'}$ est très importante, et pour les expériences actuelles, l'inversion de cette matrice est impossible numériquement. Certaines méthodes résolvent l'équation 4.6 de manière itérative (Doré et al. 2001). MADCAP (Borrill 1999) est un code qui permet de calculer de façon optimale la solution de 4.6 avec une méthode de maximum de vraisemblance. Néanmoins, les 3 approximations suivantes sont nécessaires afin de rendre le calcul faisable :

- le bruit \mathbf{n} est stationnaire, ce qui implique que la matrice $N_{tt'}$ est Toeplitz,
- la matrice de bruit peut être décrite par un vecteur :

$$N_{tt'} = \begin{cases} f(|t - t'|) & \forall |t - t'| < \tau \\ 0 & \forall |t - t'| > \tau, \end{cases}$$

- la matrice $N_{tt'}^{-1}$ est aussi Toeplitz, ce qui est faux sur les bords. Cependant, pour des matrices $10^6 \times 10^6$, cet effet est négligeable

Cette méthode optimale permet entre autre de calculer la matrice $N_{tt'}$ nécessaire au calcul du spectre de puissance (voir partie suivante).

4.2 Estimation du spectre de puissance C_ℓ

On peut décomposer le signal observé sur le ciel sur la base des harmoniques sphériques :

$$\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (4.7)$$

Les coefficients $a_{\ell, m}$ sont données par la relation inverse :

$$a_{\ell m} = \int \frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) d\Omega. \quad (4.8)$$

Si le ciel est isotrope, alors on peut calculer le spectre de puissance C_ℓ :

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'} \rangle = C_\ell \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}.$$

La relation 4.8 n'est valable que lorsque l'on possède l'information pour tout le ciel. C'est rarement le cas, pour des raisons de couverture ou de présence de contamination par des avant plans. Dans ce cas, les $Y_{\ell m}$ ne forment plus une base complète de l'espace considéré et les C_ℓ calculés ne sont plus égaux aux C_ℓ du ciel complet. Ce sont les “pseudo- C_ℓ ” notés \tilde{C}_ℓ . Par ailleurs, le bruit instrumental, le filtrage des données et la résolution finie des détecteurs modifient ce spectre de puissance.

Le programme MADCAP permet d'estimer le spectre de C_ℓ en utilisant une méthode itérative qui permet de maximiser la fonction de vraisemblance du spectre de puissance (on connaît dans ce cas les propriétés du bruit dans la carte grâce à l'étape de fabrication de la carte). Cette méthode est limitée par le temps de calcul nécessaire dans le cas des cartes de plusieurs millions de pixels.

Une autre alternative, utilisée par MASTER (Hivon et al. 2002), consiste à calculer les \tilde{C}_ℓ , puis à corriger les effets du traitement de données et de la couverture incomplète du ciel :

- La couverture partielle du ciel a pour effet de coupler entre eux les différents C_ℓ . Ceci peut être modélisé par une matrice $M_{\ell \ell'}$ dont l'expression est donnée dans (Hivon et al. 2002),
- le bruit instrumental a pour effet d'augmenter les \tilde{C}_ℓ d'une contribution \tilde{N}_ℓ . Cette contribution est évaluée en construisant un modèle du détecteur, puis en faisant la moyenne de plusieurs réalisations de ce modèle,
- le filtrage peut avoir plusieurs effets sur le spectre de puissance. Son influence est modélisée par une fonction F_ℓ . Elle est calculée une fois pour toute et l'on vérifie que son influence sur le spectre de C_ℓ ne dépend pas du modèle cosmologique,
- la résolution finie des détecteurs est corrigée par une autre fonction, B_ℓ . Dans ce cas le lobe est supposé symétrique. Une forme gaussienne du lobe est une bonne approximation de la plupart des instruments, ce qui permet de calculer $B_\ell \approx e^{-(\ell(\ell+1)\sigma_{lobe}^2/2)}$ (où σ_{lobe} est la largeur du lobe du détecteur).

Ces modélisations permettent d'écrire les \tilde{C}_ℓ en fonction des C_ℓ :

$$\tilde{C}_\ell = \sum_{\ell'} M_{\ell\ell'} F_{\ell'} B_{\ell'}^2 C_{\ell'} + \tilde{N}_\ell. \quad (4.9)$$

L'inversion de cette équation permet d'obtenir une estimation des C_ℓ . Cette estimation est bien plus rapide que la méthode MADCAP évoquée plus haut.

Estimation rapide de la précision de l'estimation des C_ℓ On peut dans le cas simple d'un bruit blanc gaussien et dans le cas d'une couverture complète du ciel déterminer de manière analytique l'incertitude sur le spectre de puissance C_ℓ (Knox 1995). Pour une expérience dont la taille du lobe est σ_{lobe} et le bruit par pixel σ_{pix} , le σ^2 de la carte vaut :

$$\sigma^2 = \langle |a_{\ell m}^{carte}|^2 \rangle = C_\ell \underbrace{e^{-l^2 \sigma_{lobe}^2}}_{Lobe} + 4\pi \underbrace{\frac{\sigma_{pix}^2}{N_{pix}}}_{bruit\ blanc}. \quad (4.10)$$

Pour estimer les C_ℓ à partir de $C_\ell^{carte} \equiv \sum_m |a_{\ell m}^{carte}|^2 / (2\ell + 1)$, on doit soustraire le bruit blanc et corriger de l'effet du lobe :

$$C_\ell^{est} = \left(C_\ell^{carte} - 4\pi \frac{\sigma_{pix}^2}{N_{pix}} \right) e^{-l^2 \sigma_{lobe}^2}. \quad (4.11)$$

Si les $a_{\ell m}$ suivent une distribution gaussienne de $\sigma = 1$, alors les C_ℓ ont une distribution de χ^2 à $n = 2\ell + 1$ degré de liberté dont la variance vaut $2n$ (?). Ici on a :

$$\sigma = \frac{1}{2\ell + 1} \left(C_\ell + 4\pi \frac{\sigma_{pix}^2}{N_{pix}} e^{l^2 \sigma_{lobe}^2} \right)$$

ce qui donne comme incertitude sur les C_ℓ^{est} :

$$(\Delta C_\ell^{est})^2 = \langle (C_\ell^{est} - C_\ell)(C_{\ell'}^{est} - C_{\ell'}) \rangle = \frac{2}{2\ell + 1} \left(C_\ell + 4\pi \frac{\sigma_{pix}^2}{N_{pix}} e^{l^2 \sigma_{lobe}^2} \right)^2 \delta_{\ell\ell'}. \quad (4.12)$$

On utilise cette formule pour calculer rapidement les erreurs attendues pour une expérience en ne connaissant que σ_{lobe} et σ_{pix} . Les C_ℓ étant estimés à partir d'une moyenne sur les $a_{\ell m}$, on commet une erreur appelée "variance cosmique" sur l'estimation des C_ℓ . Cette erreur est d'autant plus grande que ℓ est petit, puisqu'il y a moins de couples $(a_{\ell m}, a_{\ell m'})$ pour faire la moyenne à petit ℓ . C'est le premier terme du membre de droite de 4.12 qui donne la variance cosmique.

4.2.1 Signification du spectre de puissance

En reprenant l'expression 4.7, on peut estimer

$$\left\langle \left(\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell m} \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle_m Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell > 0} (2\ell + 1) C_\ell.$$

En réalité, on est limité dans notre connaissance des $a_{\ell m}$ à petite échelle angulaire, par le lobe de l'instrument ou la pixellisation de la carte. Ceci introduit une limite en ℓ pour le spectre de puissance C_ℓ , que l'on modélise ici par une coupure au delà d'un certain ℓ_{max} :

$$\left\langle \left(\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{0 < \ell < \ell_{max}} (2\ell + 1) C_\ell.$$

La somme des C_ℓ entre 0 et ℓ_{max} nous donne donc la puissance des anisotropies de température. Les figures suivantes illustrent cet aspect du spectre de puissance. Nous avons généré un spectre de puissance, puis nous avons calculé une carte correspondante. Nous sommes ensuite revenus au spectre de puissance, après avoir changé le nombre de pixels de la carte. On voit bien sur la figure 4.1 l'effet de la coupure dans l'espace des anisotropies de température sur le spectre de puissance. Plus la taille des pixels est importante, plus la coupure se produit à bas ℓ .

La figure 4.2 illustre le fait que l'on mesure la somme $\sum_{0 < \ell < \ell_{max}} (2\ell + 1) C_\ell$ quand on mesure la variance des températures dans la carte. Pour différentes taille de pixel (donc différents ℓ_{max}), nous avons mesuré la variance dans la carte (carrés bleus). On compare cette variance à la somme des C_ℓ entre 0 et ℓ_{max} .

4.3 Estimation des paramètres cosmologiques

Le spectre de puissance obtenu va nous permettre, conformément à ce qui a été vu dans le chapitre 4, de tirer des informations sur les paramètres cosmologiques. Cependant, cette estimation n'est pas aisée, et ce pour plusieurs raisons :

- le nombre de paramètres mis en jeu,
- les dégénérescences entre ces paramètres.
- la difficulté technique à calculer les modèles théoriques au cours de la minimisation.

Le dernier point est contourné en calculant les modèles cosmologiques au préalable sur une grille discrétisant l'espace des paramètres, puis en utilisant une interpolation pour obtenir un spectre de puissance quels que soient les paramètres cosmologiques.

Après un exposé général du problème, je présenterai brièvement les codes de calcul du spectre de puissance, puis nous verrons comment il est possible de contourner le problème du temps de calcul des modèles des spectres de puissance, grâce à un calcul préalable d'une grille de modèles couplé à l'utilisation d'une méthode d'interpolation.

4.3.1 Exposé général du problème

La détermination des paramètres cosmologiques est un problème d'optimisation ou de minimisation. On possède un jeu de mesures $\{m_i\}$ et la matrice des covariances ϵ_{ij} et l'on doit trouver dans l'ensemble des paramètres $\{\Omega_i\}$ le jeu de paramètre qui maximise la probabilité $P(m_i|\Omega_i)$.

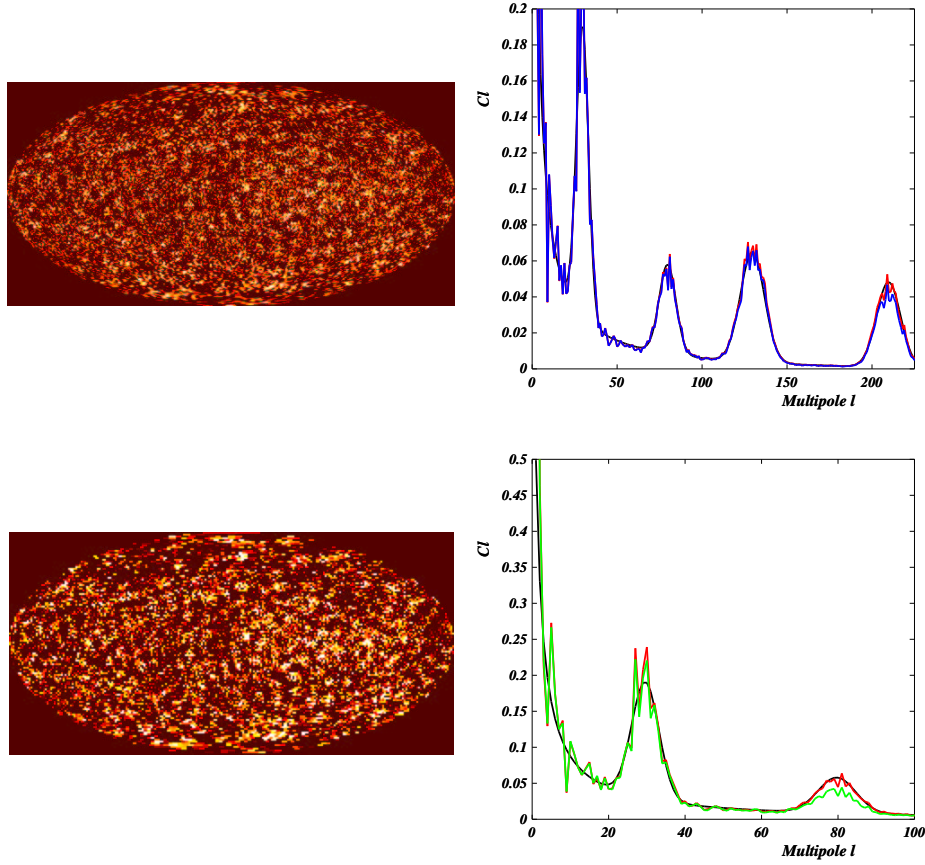


FIG. 4.1 – *Spectre de puissance calculé à partir de cartes avec différentes tailles de pixellisations. En haut, à gauche, une carte avec une taille de pixel de 3' d'arc. En haut à droite 3 spectres de puissance, en noir le spectre de puissance initial utilisé pour les cartes, en rouge le spectre de puissance calculé sur une carte à une taille de pixel de 0.76' d'arc, en bleu le spectre de puissance calculé sur la carte de droite. On voit clairement une perte de puissance pour $\ell \simeq 80$. En bas, une carte avec une taille de pixel de 1.2 degrés. A droite, 3 spectres de puissance, en noir le spectre de puissance initial utilisé pour les cartes, en rouge le spectre de puissance calculé sur une carte à une taille de pixel de 0.76' d'arc, en vert le spectre de puissance calculé sur la carte de gauche. On voit clairement une perte de puissance pour $\ell \simeq 30$.*

Dans notre cas, les mesures $\{m_i\}$ sont les spectres de puissance $(C_\ell)_{mes}$. Les paramètres cosmologiques à déterminer permettent par ailleurs de calculer un spectre théorique $(C_\ell)_{th}$, via un code de calcul d'anisotropie (§4.3.3). Cependant le temps de calcul des modèles par les codes numériques actuels est trop long pour permettre une minimisation efficace. On est donc amené, au lieu de calculer numériquement tous les modèles, à discretiser l'espace des paramètres à l'aide d'une grille, et à ne calculer avec les codes d'anisotropies

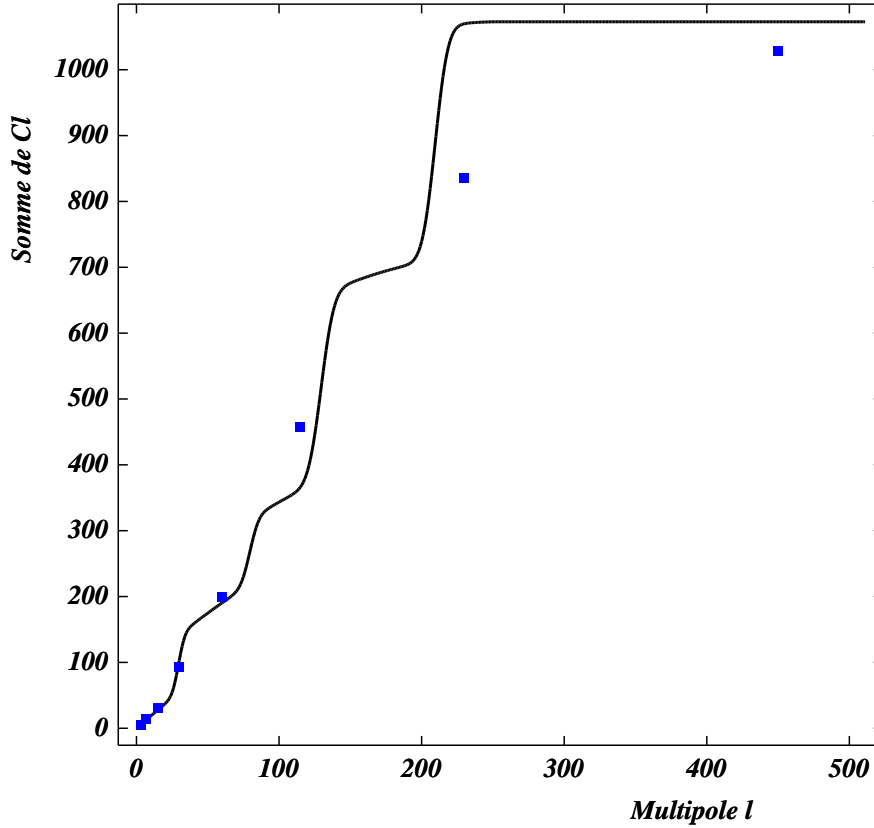


FIG. 4.2 – *Illustration du spectre de puissance. La courbe noire représente la somme des C_ℓ entre 0 et ℓ_{max} . Les carrés bleus la variance dans des cartes de tailles de pixel de plus en plus petites. La différence entre les deux est due à l'incertitude sur le choix du ℓ_{max} à adopter dans le cas des pixels utilisés (taille, mais surtout forme des pixels).*

que les modèles présents sur la grille (§4.3.4). Les modèles se trouvant dans le reste de l'espace des paramètres sont calculés grâce à une interpolation multilinéaire (§4.3.5) qui permet en peu de temps d'obtenir n'importe quel spectre de puissance correspondant à un jeu de paramètres cosmologiques donné.

Pour estimer le jeu de paramètres, on peut maximiser la probabilité $P((C_\ell)_{mes} | (C_\ell)_{th})$ ou alternativement minimiser le χ^2 . Pour obtenir ce résultat, deux approches sont possibles :

- soit en parcourant l'espace des paramètres (§4.4.2),
- soit en utilisant un processus d'ajustement (§4.4.1).

La première méthode permet d'obtenir les contours de probabilités à une ou deux dimensions. La deuxième méthode donne accès à la matrice de Fisher qui permet d'étudier les corrélations entre paramètres au voisinage du minimum. Ces deux approches sont résumées sur les figures 4.3 et 4.4 et

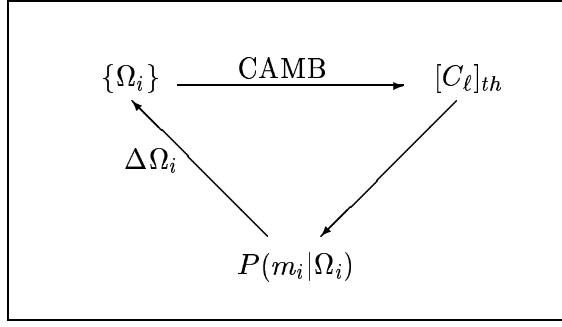


FIG. 4.3 – *Principe du parcours de l'espace des paramètres*

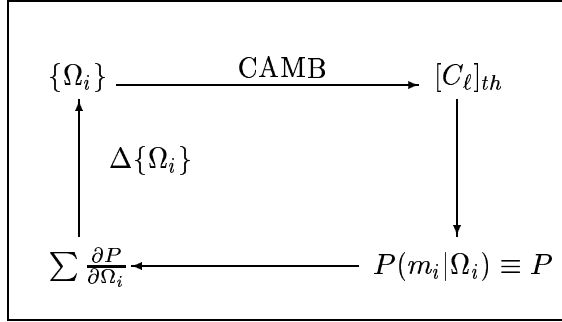


FIG. 4.4 – *Principe de la minimisation*

seront décrites en détails dans la partie §4.4 de ce chapitre.

4.3.2 Résultats antérieurs

Afin de mettre en évidence les qualités et les éventuelles faiblesses de notre méthode d'estimation des paramètres cosmologiques, il est nécessaire de résumer les résultats des méthodes actuelles d'estimation des paramètres. Je présenterai ici deux méthodes différentes à travers deux articles représentatifs ((Tegmark & Zaldarriaga 2000) et (Verde et al. 2003)).

Parcours de l'espace des paramètres

Dans leur publication, Tegmark et Zaldarriaga décrivent comment estimer les paramètres cosmologiques en parcourant l'intégralité de l'espace des paramètres. L'estimation comprend 4 étapes :

- le calcul d'un petit nombre de spectres de puissance correspondant à des modèles dans des sous espaces de l'espace des paramètres,
- utilisation de ces spectres de puissance pour calculer par interpolation des modèles en plus grand nombre,
- le calcul de la fonction de vraisemblance de chaque spectre de puissance,

- la marginalisation par rapport à certains paramètres pour obtenir des résultats sur les vraisemblances à une ou deux dimensions.

L'analyse comprend 10 paramètres :

- τ profondeur optique de réionisation,
- Ω_Λ densité d'énergie de type constante cosmologique,
- Ω_k densité d'énergie due à la courbure,
- ω_b densité d'énergie des baryons,
- ω_{cdm} densité d'énergie de matière noire,
- ω_ν densité d'énergie des neutrinos,
- n_s indice spectral scalaire,
- n_t indice spectral tensoriel,
- A_s amplitude des modes scalaires,
- A_t amplitude des modes tensoriels.

La première étape fait appel au code CMBfast, analogue à celui utilisé dans notre analyse. La deuxième étape fait appel à plusieurs arguments physiques pour augmenter par interpolation le nombre de modèle de l'espace des paramètres. Les modes scalaires pour $\ell \simeq 100$ sont calculés sur une grille fine ($\simeq 10$ points) pour les paramètres $(\tau, \Omega_k, \Omega_\Lambda, n_s)$ et sur une grille de 3 points pour chaque paramètre $(\omega_b, \omega_{cdm}, \omega_\nu)$. Les spectres de puissance pour les paramètres $(\omega_b, \omega_{cdm}, \omega_\nu)$ restants sont calculés par interpolation. Cette approximation est justifiée par le fait que les paramètres $(\omega_b, \omega_{cdm}, \omega_\nu)$ n'interviennent quasiment pas dans la physique à grande échelle (i.e. $\ell < 100$).

De même, l'influence de τ sur le spectre de puissance à $\ell > 100$ est utilisée pour réduire le nombre de modèles calculés par CMBfast en multipliant les spectres de puissance par un facteur constant $e^{-2\tau}$. Par ailleurs, le facteur acoustique défini au chapitre 4 équation 4.27 permet de prendre en compte l'effet de $(\Omega_k, \Omega_\Lambda)$ pour réduire à nouveau le nombre de modèles calculés. Dans cette analyse, la fonction de vraisemblance est une gaussienne, tout comme dans notre analyse.

Des résultats récents de ce type d'analyse sont décrits dans (Wang et al. 2003). Ces résultats ne tiennent pas compte des résultats de WMAP. Les auteurs utilisent les données d'une trentaine d'expériences sur le CMB. Ils obtiennent les résultats suivants :

Paramètres	Ω_b	Ω_{cdm}	Ω_Λ	H_0	n_s
Valeurs	0.046	0.22	0.71	71	0.99
Erreurs	0.006	0.03	0.11	13	0.06

Cette méthode a l'avantage de parcourir l'espace des paramètres de façon exhaustive. Elle est cependant très coûteuse en temps de calcul. Pour réduire ce problème du temps de calcul, on est amené à parcourir une partie seulement de l'espace des paramètres, en se déplaçant de proche en proche, soit grâce à des méthodes de minimisation (notre approche), soit par des méthodes d'utilisation plus récentes que sont les Chaines de Markov Monte-Carlo (MCMC pour Monte-Carlo Markov Chain).

Analyse par Chaîne de Markov Monte-Carlo

Les méthodes utilisant les MCMC sont devenues au cours de ma thèse les outils les plus utilisés d'estimation des paramètres cosmologiques. Elles permettent en effet de calculer un nombre de modèles moins important que les méthodes utilisant des grilles (voir ci dessus). Cette méthode est celle qui a été utilisée pour analyser les données de WMAP. Le principe des MCMC est de constituer une chaîne dans l'espace des paramètres. Chaque point de la chaîne Ω_i est déterminé à partir du point précédent, et la distribution des paramètres se fait selon la probabilité $p(\Omega|\mathbf{C})$, \mathbf{C} étant le spectre de puissance mesuré.

Concrètement, la construction de la chaîne comporte trois étapes :

- on choisit un point Ω_1 de départ de la chaîne,
- on recherche le point suivant de la chaîne Ω de manière aléatoire. Une fonction $f(\Omega_i, \Omega_{i+1})$ donne la probabilité d'obtenir le point Ω_{i+1} après le point Ω_i . La seule propriété de cette fonction est une propriété de symétrie : $f(\Omega_i, \Omega_{i+1}) = f(\Omega_{i+1}, \Omega_i)$,
- le point Ω_{i+1} est inclu dans la chaîne :
 - si la valeur de

$$\alpha = \frac{p(\Omega_{i+1}|\mathbf{C})}{p(\Omega_i|\mathbf{C})}$$

est supérieure à 1

- avec la probabilité α si $\alpha < 1$.

Sinon la chaîne reste au point Ω_i .

Les propriétés de convergence de ce genre de chaîne sont relativement complexe et je renvoie à l'article (Christensen & Meyer 2001) ainsi qu'à (Bourrachot 2003).

Cette méthode a été utilisée pour analyser les données de l'expérience WMAP (voir chapitre 3). Les résultats de cette analyse sont présentés dans (Spergel et al. 2003). Concernant les paramètres que nous cherchons à estimer, les résultats sont les suivants :

Paramètres	Ω_b	Ω_{cdm}	Ω_Λ	H_0	n_s
Valeurs	0.044	0.23	non évalué	71	0.93
Erreurs	0.004	0.04	-	3	0.03

D'autres paramètres sont évalués au cours de cette analyse, en particulier la profondeur optique de réionisation, qui dans notre analyse est fixée à zéro. Je reviendrai sur ce point plus tard.

L'avantage principal de cette méthode sur la méthode précédente est le temps de calcul. Alors que la grille échantillonne l'espace des paramètres de manière uniforme, la chaîne de Markov explore l'espace des paramètres là où la vraisemblance des paramètres est la plus grande, réduisant de ce fait le nombre de spectre de puissance à calculer et, éventuellement, à stocker. Le gain de temps est de l'ordre d'un facteur 100 (Verde et al. 2003). Cette méthode reste cependant moins rapide que notre analyse qui repose sur le calcul au préalable des modèles, qui sont dans notre cas calculés une fois pour toute. Par ailleurs notre méthode d'estimation demande le calcul d'un moins grand nombre de modèles pour converger. L'ajustement à besoin

typiquement d'une cinquantaine d'itérations pour converger, nécessitant le calcul de $\simeq 1600$ modèles.

4.3.3 Calcul des spectres de puissance

L'estimation des paramètres cosmologiques à partir des données du fond diffus se fait en utilisant le spectre de puissance C_ℓ défini au chapitre 2. Cet outil statistique de description des anisotropies contient l'information sur, d'une part, la physique de l'univers primordial au moment du découplage, d'autre part, la géométrie de l'univers, c'est à dire le transfert des photons de la surface de dernière diffusion. On a vu dans le chapitre 2, de manière qualitative, comment se forment les anisotropies du fond diffus, comment elles évoluent et la manière dont on les perçoit dans le spectre de puissance. Afin de calculer de manière plus rigoureuse le spectre de puissance, il faut utiliser les équations de Boltzmann (pour le fluide de photons), les équations d'Euler (pour le fluide de baryons et de matière noire) et les équations d'Einstein (pour décrire la métrique).

Ces équations sont résolues dans l'espace de Fourier, où les différents modes \vec{k} sont indépendants dans le cadre de la théorie linéaire des perturbations. Chaque mode \vec{k} est décomposé sur la base des polynômes de Legendre P_ℓ de telle sorte que les anisotropies de températures s'écrivent :

$$\Delta_T(\vec{k}, \vec{n}) = \sum_{\ell} (2\ell + 1) (-i)^\ell \Delta_{T\ell} P_\ell(\mu), \quad (4.13)$$

où \vec{n} est la direction dans laquelle on regarde, $\mu = \vec{k} \cdot \vec{n}/k$, et $\Delta_{T\ell}$ est le multipole d'ordre ℓ . Les équations de Boltzmann décrivent l'évolution des fluctuations de température $\Delta_T(\vec{k}, \vec{n})$. Ces équations sont couplées par diffusion Thomson au fluide de baryons dont la distribution est donnée par les équations de continuité et de conservation de l'énergie-impulsion, qui sont elles même couplées à la matière noire via le potentiel gravitationnel (dont l'évolution est gouvernée par les équations d'Einstein de la relativité générale). Comme les équations de Boltzmann sont décomposées sur la base des polynômes de Legendre, le système à résoudre contient donc un très grand nombre d'équations différentielles couplées, rendant sa résolution difficile et consommatrice de temps de calcul.

En 1996, Seljak et Zaldarriaga ont proposé une nouvelle approche (Seljak 1996). En intégrant formellement l'équation d'évolution des anisotropies de température, on peut ramener le calcul des anisotropies à un calcul d'intégrale contenant 2 parties :

- un terme décrivant l'évolution des sources des anisotropies,
- un terme géométrique, qui ne dépend donc que de la courbure de l'espace.

L'avantage de cette décomposition est que la partie concernant le calcul de l'évolution des sources des anisotropies ne dépend pas du moment multipolaire ℓ , réduisant ainsi le nombre d'équations à intégrer. Toute la dépendance en ℓ se trouve dans le terme géométrique, qui peut être calculé à l'avance et tabulé, ne dépendant que de la courbure de l'espace. Une fois les anisotropies

calculées, il reste à intégrer les anisotropies de température sur le spectre de puissance initial $P(k)$ pour obtenir le spectre de puissance C_ℓ .

4.3.4 Grille de modèles et base de données

On utilise le programme CAMB¹ (Code for Anisotropies in the Microwave Background), qui est basé sur la méthode d'intégration sur la ligne de visée exposée en §4.3.3. Le nombre de paramètres libres est guidé d'une part par le temps de calcul et l'espace disque nécessaire au stockage des modèles, qui limite le nombre de modèles calculables et stockables, d'autre part par le fait que les expériences actuelles ne parviennent que très difficilement à lever les dégénérescences évoquées dans le chapitre 4.

Le calcul des modèles s'effectue au CCIN2P3 à Lyon. La première étape consiste à préparer puis exécuter des jobs batchs, le calcul de tous les modèles n'étant pas possible en une seule fois. Puis il faut récupérer les informations concernant ces fichiers (paramètres utilisés, emplacement sur le disque) dans le fichier principal de la base de données .

Calcul des modèles Le calcul des modèles s'effectue par traitement par lot (ou job Batch) au CCIN2P3 à Lyon. La première étape de la production de modèles consiste à choisir le nombre de modèles à calculer dans un job. En effet, les jobs batch sont classés en catégories. Ces catégories spécifient les ressources disponibles pour le job batch, comme la mémoire vive utilisée, ou le temps processeur maximum. Quelques centaines de modèles cosmologiques sont donc calculés par batch, puis sauvegardés dans un fichier de sauvegarde sous la forme d'un vecteur par modèle, avec la liste des paramètres cosmologiques qui a été utilisée pour générer les spectres de puissance.

Compte tenu de la place occupée sur le disque par ces fichiers, ceux ci sont ensuite déplacés sur le système de stockage HPSS (pour High Performance Storage System) au CCIN2P3², qui offre une place disque plus importante que les disques montés sur le système AFS. De plus, compte tenu du nombre de fichier, ce n'est pas sous cette forme que l'on utilise les modèles cosmologiques, mais dans une base contenant tout au plus une dizaine de fichiers. On peut donc utiliser un système de fichiers moins performant pour sauvegarder les fichiers directement issus de la procédure de calcul. On doit donc dans un troisième temps rapatrier les modèles cosmologiques du système HPSS dans le système de fichier standard (AFS, NFS, ...), plus performant, et réduire dans le même processus le nombre de fichiers.

Organisation des fichiers de modèles Lors de cette opération, il faut veiller à ne pas perdre ou modifier l'information sur les paramètres cosmologiques et les modèles correspondant à ces paramètres. Par ailleurs, afin de réduire l'espace disque utilisé, et, dans une moindre mesure, rendre plus rapide le processus d'interpolation, on inclut dans cette étape la possibilité de compresser l'information en ne gardant dans les spectres de puissance qu'un

¹site web : <http://camb.info>

²site web : <http://doc.in2p3.fr/hpss/>

point sur N , N pouvant être de l'ordre de 10. Dans ce cas, il faut lors de l'interpolation dans l'espace des paramètres utiliser aussi une interpolation entre les différents multipoles pour retrouver un spectre complet (voir fig. 4.5).

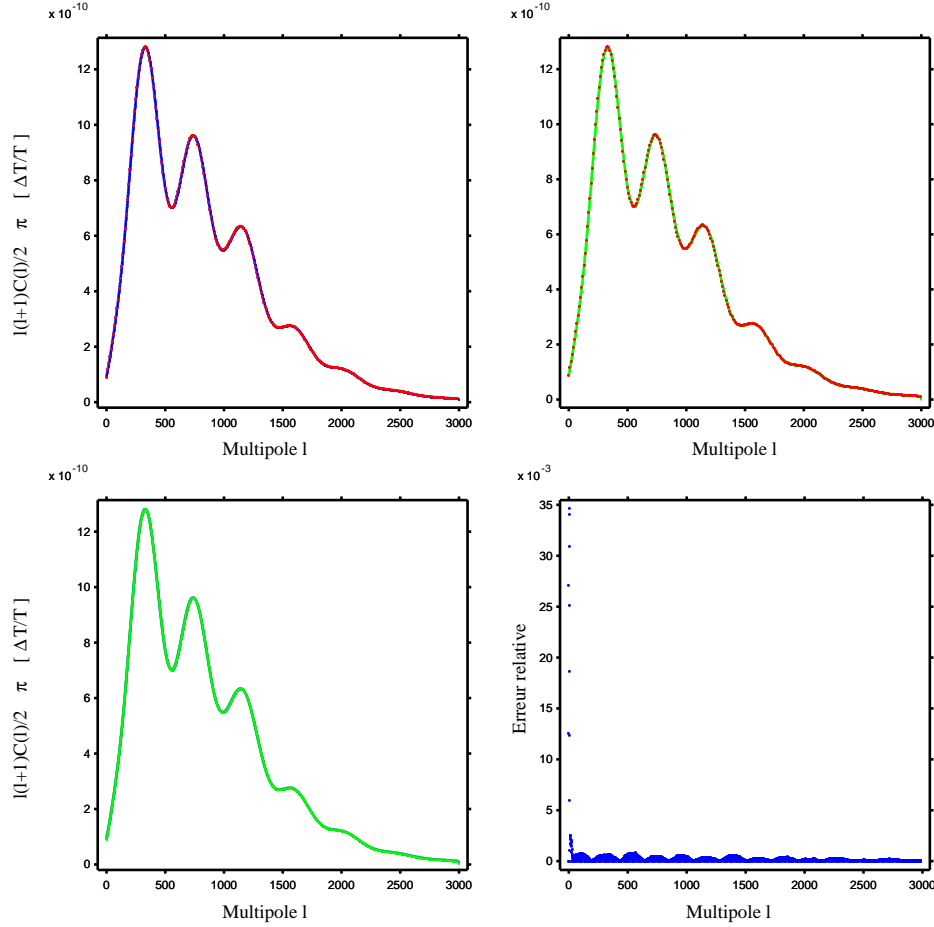


FIG. 4.5 – *Exemple d'interpolation d'un modèle permettant de réduire la place disque nécessaire au stockage des modèles de la base de données.* **En haut à gauche :** *spectre de puissance initial en bleu et les points conservés en rouge.* **En haut à droite :** *les points gardés pour l'interpolation (rouge) et le modèle interpolé (vert).* **En bas à gauche :** *le spectre de puissance interpolé (vert) et le spectre initial (en dessous, en bleu).* **En bas à droite :** *valeur absolue de la différence relative entre le spectre interpolé et le spectre initial.*

On peut décider, pour des raisons d'espace disque, de compresser la base de données en réduisant le nombre de points de chaque modèle, puis en utilisant une interpolation linéaire pour reconstituer le spectre complet. Cette méthode, testée sur un grand nombre de modèles ($\simeq 400$), donne une erreur maximum de 0.8% (voir figure 4.6). L'ensemble de ce processus de calcul des modèles cosmologiques est résumé schématiquement à la figure 4.7.

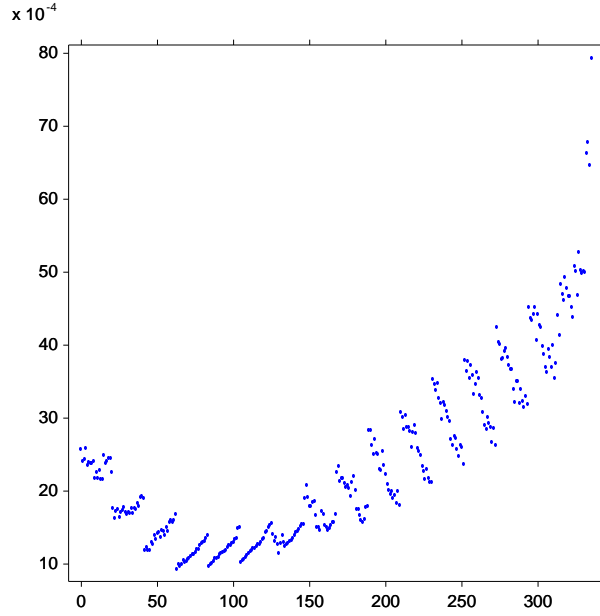


FIG. 4.6 – *Erreur introduite par l'interpolation du spectre de C_ℓ décrite par la figure 4.5. L'erreur commise est inférieure à 0.1 % lorsque l'on sélectionne un point sur dix. Les structures apparentes sur la figure sont dues au générateur de nombres aléatoires utilisé.*

Organisation de la base de données On doit ensuite regrouper les informations sur les paramètres cosmologiques pour lesquels les spectres de puissance ont été calculés dans une base de données, qui contient donc, pour chaque modèle cosmologique, les paramètres qui le définissent et l'emplacement où il se trouve, c'est à dire dans quel fichier de sauvegarde et à quelle place dans le fichier de sauvegarde. Cette opération est réalisée en récupérant dans chaque fichier de modèles les paramètres décrivant les modèles et leur emplacement (sur le disque ainsi que l'emplacement dans le fichier). Il en résulte un fichier qui regroupe tous les paramètres cosmologiques des modèles calculés ainsi que leur emplacement (figure 4.8). La base de données est codée en utilisant un NTuple.

L'espace disque utilisé par les modèles est le facteur limitant dans cette opération, ce qui explique la nécessité de réduire la taille des modèles, en utilisant une interpolation par exemple. Une base de données de 660000 modèles allant jusqu'à $\ell = 3000$ représente, stockée telle quelle, 8 Go d'espace disque et de l'ordre de 10000h de calcul au CCIN2P3.

Base de données finale Dans notre cas, on choisit de calculer les modèles pour 5 paramètres, la densité de baryons Ω_b , la densité de matière noire froide Ω_{cdm} , la densité d'énergie sombre Ω_Λ , la constante de Hubble H_0 et l'indice spectral scalaire n_s . Les autres paramètres intervenant dans le calcul du spectre de puissance, comme le nombre et la densité d'énergie des

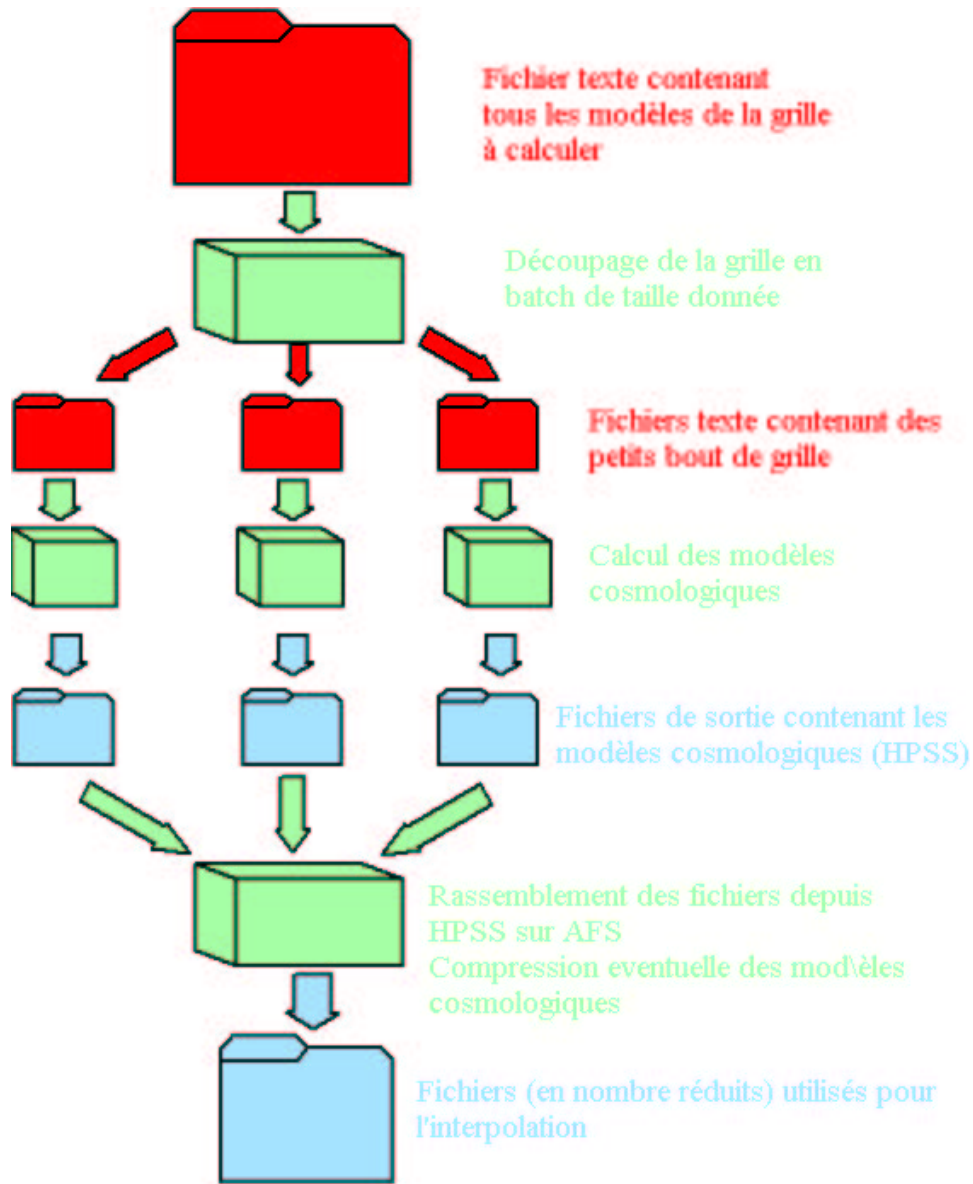


FIG. 4.7 – Schéma synthétique de la génération des modèles cosmologiques.

neutrinos, ou le rapport entre l'amplitude des modes scalaires et les modes tensoriels, sont fixés soit aux valeurs les plus probables au moment du calcul de la base de données (nombre effectif de neutrinos égal à 3.04, $\tau = 0$ pour les valeurs utilisées ici), soit aux valeurs données par les modèles les plus simple d'inflation (amplitudes des modes tensoriels négligeables) (valeurs resumées dans les tables 5.1 et 5.2 chapitre suivant). Par ailleurs, les spectres de puissance sont évalués jusqu'à $\ell = 3000$, ce qui permet de prendre en compte les dernières mesures issues des expériences interférométriques et de réaliser des simulations pour le satellite Planck (voir chapitre 3).

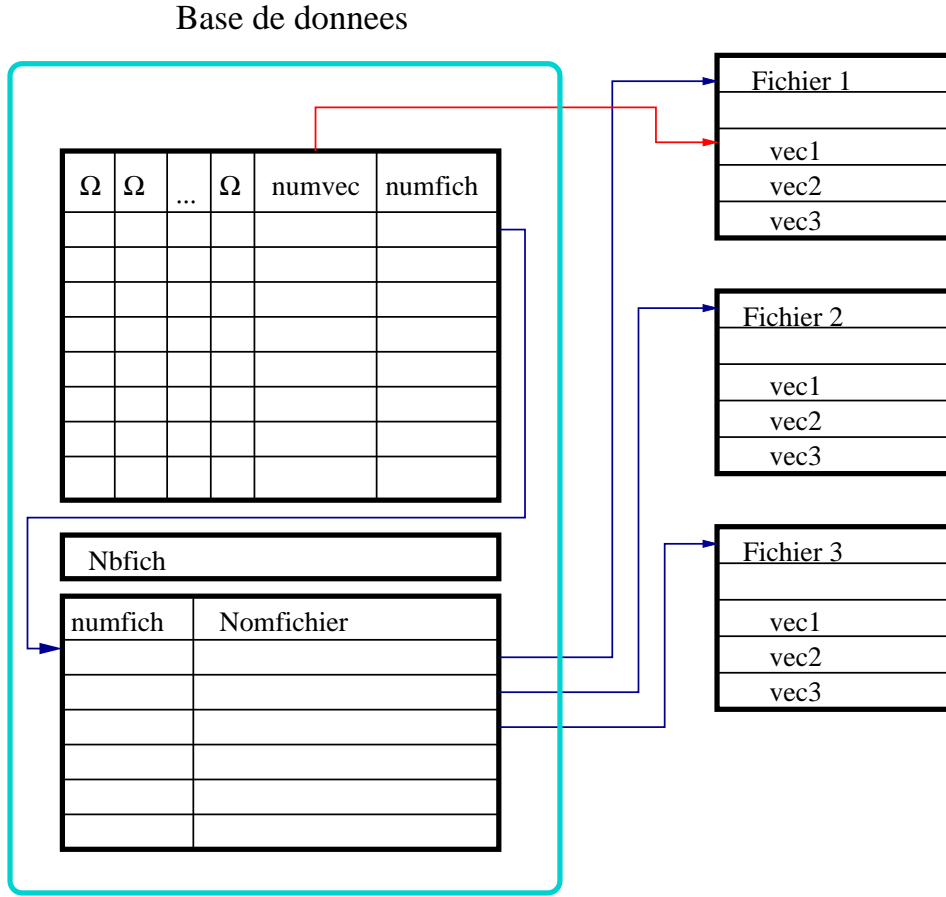


FIG. 4.8 – *Structure de la base de données.*

4.3.5 Hypercube et représentation de l'espace des paramètres

Pour pouvoir obtenir de façon rapide une courbe de C_ℓ quels que soient les paramètres cosmologiques, il est nécessaire de représenter de manière efficace l'espace des paramètres couvert par la base de données. On utilise pour cela un Hypercube, qui offre les fonctionnalités suivantes :

- représentation de l'espace des paramètres à N dimensions,
- calcul des coefficients de pondération nécessaires à l'interpolation,
- vérification de l'état de la base de données.

On peut utiliser l'Hypercube pour représenter un espace multidimensionnel discretisé quelconque et y réaliser des interpolations. Les paragraphes suivants exposent la technique d'interpolation utilisée et la manière dont elle est utilisée dans l'Hypercube.

Exposé du principe de l'interpolation multilinéaire La méthode d'interpolation utilisée pour obtenir un spectre de puissance C_ℓ quels que soient les paramètres cosmologiques à partir de la grille est dite "interpolation multilinéaire". Elle est tirée de (Press 1988). Le schéma 4.9 en montre le principe. L'objectif de la méthode d'interpolation est, d'une part,

de déterminer quels modèles seront utilisés dans l'interpolation et d'autre part quel "poids" il faut donner à chacun de ces modèles.

Plaçons nous pour simplifier dans un espace à 2 dimensions. Pour interpoler un modèle dont les paramètres sont (X,Y) , on dispose de la grille (X_i,Y_i) . On utilise les 4 points (①, ②, ③ et ④) qui définissent une maille élémentaire dans l'espace des paramètres discrétisé (voir figure 4.9). On définit alors sur chaque axe de l'espace des paramètres la distance normalisée au pas de la grille entre la projection du point (X,Y) et le point (0,0) de la maille élémentaire (point ①), i.e. :

$$d_X^{norm} = d_X/d_X^{pas}, \text{ et } d_Y^{norm} = d_Y/d_Y^{pas}$$

où d_X^{pas} (resp. d_Y^{pas}) représente le pas de la grille dans la dimension X (resp. Y)³, d_X (resp. d_Y) étant la distance entre la projection du point (X,Y) sur X (resp. Y) et le point ①. On définit le poids du point ① dans l'interpolation par la formule $(1 - d_X^{norm})(1 - d_Y^{norm})$. De manière formelle, le modèle défini par le jeu de paramètres (X,Y) , noté ⑧ est donné par :

$$\begin{aligned} \textcircled{8} = & (1 - d_X^{norm})(1 - d_Y^{norm}) \times \textcircled{1} + (d_X^{norm})(1 - d_Y^{norm}) \times \textcircled{2} \\ & + (1 - d_X^{norm})(d_Y^{norm}) \times \textcircled{3} + (d_X^{norm})(d_Y^{norm}) \times \textcircled{4} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Cette formule valable à 2 dimensions est généralisable à n dimensions, mais il faut alors calculer 2^n termes (un pour chaque sommet de la maille élémentaire) de la forme :

$$\prod_{i=0}^{n-j} (1 - d_X^{norm})_i \times \prod_{j=n-j}^n (d_X^{norm})_j$$

pour obtenir le poids de chaque sommet de la maille élémentaire. Il faut donc déterminer pour chaque sommet de la maille et pour chaque dimension si le facteur à appliquer est de la forme $(1 - d_X^{norm})$ ou d_X^{norm} . Pour cela, on numérote les sommets de la maille élémentaire (chiffres en bleu) comme sur la figure 4.10, qui présente le cas à 3 dimensions, de telle manière que la décomposition en binaire (les triplets de chiffres en noir sur la figure) des numéros des sommets nous permette de savoir quel type de facteur appliquer dans le calcul de l'interpolation. Avec les notations définies plus haut, le facteur de pondération du modèle 4 (0,0,1) est $(1 - d_X^{norm})(1 - d_Y^{norm})(d_Z^{norm})$ si (X,Y,Z) est la base de la maille.

Structure de l'Hypercube L'Hypercube est une classe C++ composée de plusieurs objets :

- un entier représentant la dimension de l'Hypercube,
- un tableau de vecteur $\{V_i\}$, chaque vecteur représentant un axe (donc une dimension) de l'Hypercube,
- un vecteur grille G , qui représente les noeuds de l'espace dicrétisé

³Ces pas peuvent être non uniformes sur la grille, la méthode restant la même en remplaçant le pas par la distance entre 2 points successifs de la grille de modèles

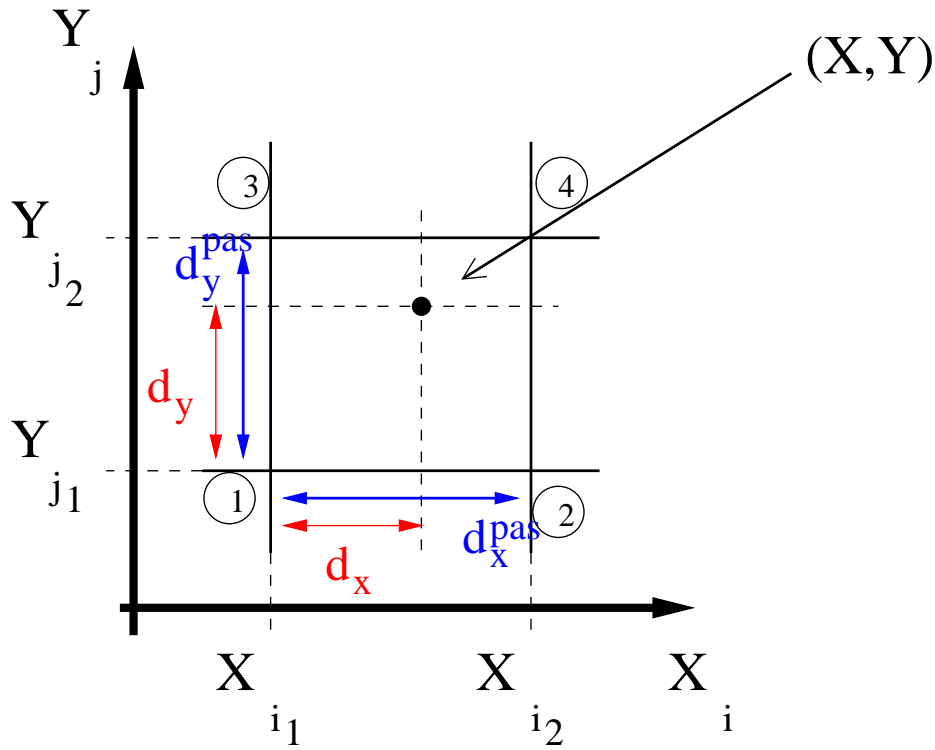


FIG. 4.9 – Schéma représentatif de l'interpolation dans un cas à 2 dimensions.

- une interface qui relie l'Hypercube à une base de données, et qui a pour fonction de récupérer les modèles nécessaires à l'interpolation.

Chaque vecteur V_i du tableau de vecteurs représente un axe de l'Hypercube, c'est à dire que dans chaque vecteur on a mis les valeurs discrètes que peut prendre le paramètre Ω_i . Ceci implique aussi le fait que les paramètres sont ordonnés dans l'Hypercube, puisqu'ils sont numérotés. Le vecteur G est un vecteur à une dimension. L'indice k du vecteur G correspond à un point de l'espace des paramètres et est défini comme suit : si i représente l'indice courant des paramètres, l_i l'indice du vecteur V_i correspondant au point de l'espace des paramètres, et $S(V_i)$ le nombre d'éléments de V_i , alors $k = \sum_i [l_i \prod_{j < i} S(V_j)]$. Dans ce vecteur $G(k)$, on peut placer un identifiant, appelé VertexId, qui contient une information sur l'état de la grille. Dans l'état actuel du code, cet identifiant sert à stocker des informations concernant la base de données (voir §4.3.5). Enfin l'interface est un objet qui permet de relier des points de l'espace des paramètres représentés dans l'Hypercube à des données au sens large, dans notre cas les modèles cosmologiques contenus dans la base de données.

Construction de l'Hypercube La construction de l'Hypercube nécessite au minimum le remplissage du tableau de vecteur $\{V_i\}$ et de la grille G . La spécification de l'interface vers la base de données est optionnelle et nous

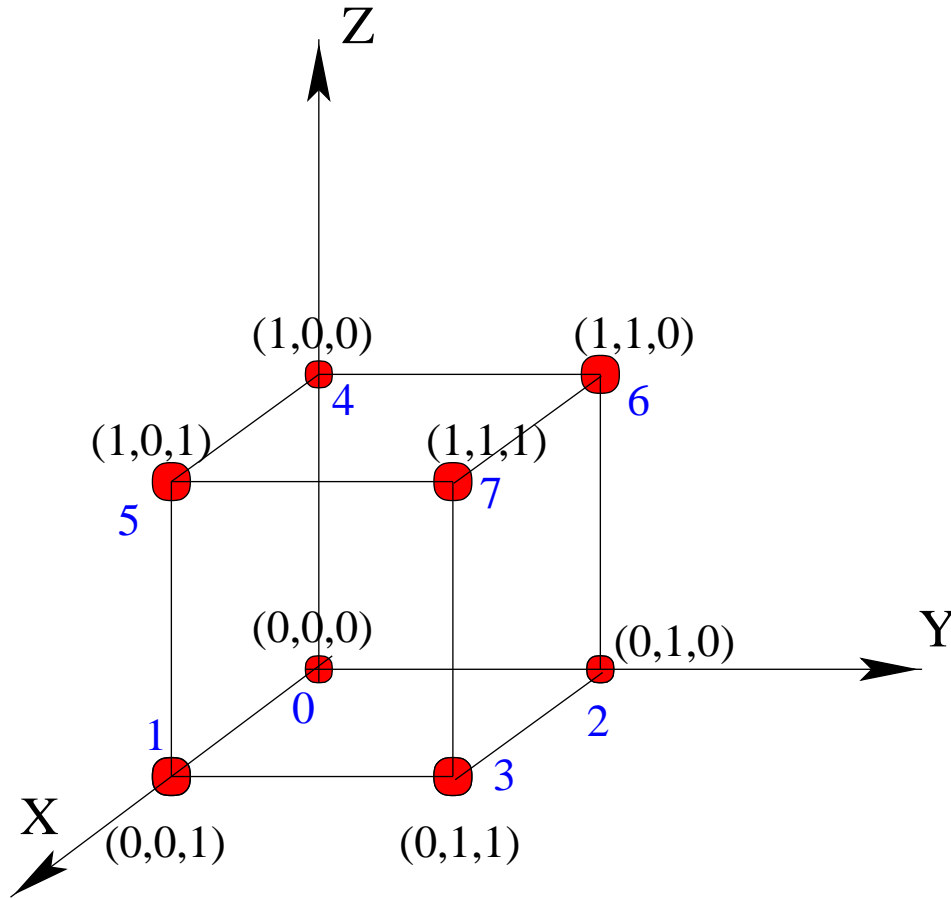


FIG. 4.10 – Numérotation des sommets de la maille élémentaire de l'Hypercube.

verons plus loin comment on l'utilise.

Le remplissage du tableau $\{V_i\}$ se fait en ajoutant des points de l'espace des paramètres à l'Hypercube. On récupère les coordonnées du point de l'espace à ajouter et on insère sur chaque axe V_i une nouvelle valeur possible du paramètre Ω_i . On doit, une fois que ce processus est terminé pour une discrétisation donnée de l'espace des paramètres considéré, déterminer la taille du vecteur G , puis marquer dans la grille tous les points auxquels sont associées des données. Il est en effet crucial (voir §4.3.5) de savoir si l'Hypercube est "complet" au sens mentionné plus haut, et ce caractère (complet ou non) est facilement vérifié sur le vecteur G , dont tout les éléments doivent être remplis (en pratique, on choisit une valeur par défaut pour $G(k)$, qui signale un élément non modifié).

Une deuxième manière d'initialiser l'Hypercube, et celle que nous utilisons en pratique, utilise une base de données. La base de données doit respecter le format décrit sur la figure 4.8 pour pouvoir initialiser un Hypercube. Comme dans le cas général, il faut d'abord remplir le tableau de vecteurs $\{V_i\}$, à l'aide du fichier principal de la base de données, qui donne

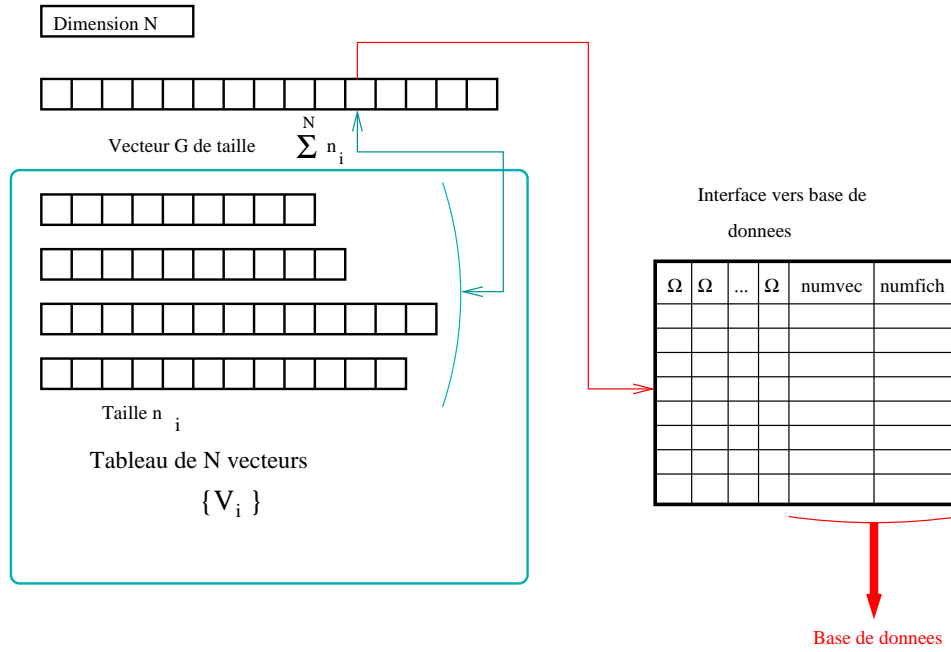


FIG. 4.11 – *Structure synthétique de l'Hypercube.*

les coordonnées des points à représenter dans l'Hypercube. Cette étape suit pas à pas la méthode décrite plus haut. Par contre le remplissage de la grille est un peu différent. On ne rentre plus dans la grille uniquement la présence ou non de données, mais aussi l'emplacement des coordonnées de ces données dans le fichier principal de la base. Ceci permet de retrouver rapidement quels sont les fichiers à ouvrir lors de l'interpolation, au lieu d'avoir à scanner tout le fichier principal de la base. Cette opération étant, pour N dimensions, effectuée 2^N fois (voir §4.3.5), le gain de temps devient important dans notre cas, ou $N = 5$. Enfin, on finit par initialiser l'interface avec la base de données en lui donnant comme informations tout ce qui se trouve dans le fichier principal de la base.

Pour s'affranchir des limites de la grille de modèles précalculés, nous utilisons 2 Hypercube. Un pour représenter la grille précalculée, où les noeuds correspondent donc à des modèles existants, et un deuxième Hypercube, qui au lieu de réaliser une interpolation, calcule les modèles nécessaires à l'interpolation d'un modèle hors grille, en créant une nouvelle cellule. Ceci nous permet d'étendre petit à petit les limites de la base de données initiale et de calculer correctement les erreurs des modèles se trouvant sur les bords de la grille.

Utilisation de l'Hypercube Une fois que l'Hypercube est initialisé, il est lié à une base de données. On peut alors effectuer 2 types d'opérations :

- une vérification de l'intégrité de la base de données,
- l'interpolation proprement dite.

Comme je l'ai mentionné en §4.3.5, l'interpolation nécessite un Hypercube complet, c'est à dire un Hypercube dans lequel chaque point de la grille correspond effectivement à un modèle. Pour des raisons techniques, il peut arriver qu'un modèle de la base de données ne soit pas présent ou défectueux. Une méthode associée à l'Hypercube permet de vérifier que la base de données est bien complète, et dans le cas ou elle ne l'est pas, d'identifier les paramètres du modèle à recalculer.

Une fois l'intégrité de la base vérifiée, on peut utiliser l'Hypercube pour effectuer des opérations d'interpolation. Comme on l'a vu en §4.3.5, il faut dans un premier temps identifier la maille élémentaire qui encadre le modèle à interpoler. Ceci est réalisé simplement à l'aide des vecteurs $\{V_i\}$ initialisés en §4.3.5. Pour trouver la maille élémentaire, on encadre sur chaque axe le paramètre du modèle dont on veut obtenir une interpolation par les paramètres directement supérieur et inférieur. On obtient ainsi les paramètres des modèles que l'on doit utiliser dans l'interpolation. Ces paramètres sont utilisés pour récupérer le modèle dans la base de données via l'interface avec la base de donnée et ses fonctions associées.

La dernière étape consiste en l'attribution des poids à chacun des modèles en suivant la méthode présentée dans la partie §4.3.5. On obtient ainsi⁴ le modèle interpolé qui peut servir dans le cadre de notre analyse des données du fond diffus, cette analyse faisant plus précisément l'objet du §4.4.

Enfin, nous avons inclu la possibilité d'utiliser 2 Hypercube (et donc 2 bases de données) pour interpoler les spectres de puissance, ce qui permet d'utiliser un Hypercube grand mais peu précis et un deuxième Hypercube plus petit mais plus précis.

4.4 Minimisation et marginalisation

Dans cette partie, je vais décrire plus en détails la méthode par laquelle on détermine les paramètres cosmologiques en utilisant les fonctions de l'Hypercube détaillées ci dessus. Dans notre analyse, nous utilisons comme critère d'optimisation le χ^2 défini par :

$$\chi^2(\{\Omega_i\}) = \sum_{\ell} \frac{(C_{\ell}^{th}(\{\Omega_i\}) - C_{\ell}^{mes})^2}{\sigma_{C_{\ell}}^2}.$$

Le spectre de puissance C_{ℓ}^{th} est calculé par l'Hypercube. Pour obtenir une estimation des paramètres par minimisation du χ^2 , on peut soit utiliser les propriétés du gradient de la fonction à minimiser, soit parcourir linéairement l'espace des paramètres et calculer le χ^2 en un certain nombre de points de l'espace des paramètres. Il faut noter que l'on pourrait remplacer le critère d'optimisation par une fonction de vraisemblance ou une approximation de cette fonction de vraisemblance comme cela est fait dans (Bartlett, Douspis, Blanchard, & Le Dour 2000).

⁴entre autre, car cette méthode peut être utilisée potentiellement quel que soit le type de données, au sens général, que l'on utilise.

4.4.1 Minimisation du χ^2

L'estimation des paramètres cosmologiques est un problème d'estimation qui est non linéaire, c'est à dire que le spectre de puissance ne dépend pas de manière linéaire des paramètres Ω_i . On doit donc utiliser une méthode de résolution itérative pour minimiser le χ^2 . La méthode choisie est la méthode de Levenberg-Marquardt, qui est tirée de (Press 1988). On approxime le χ^2 au voisinage du minimum par une forme quadratique :

$$\chi^2(\vec{a}) = \gamma - \vec{d} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{a}, \quad (4.15)$$

où \mathbf{D} est la matrice $N \times N$ (N étant le nombre de paramètres) des dérivées secondes de χ^2 (dite Hessian ou matrice de courbure), \vec{d} le vecteur dérivé et \vec{a} le jeu de paramètres. Si cette approximation est bonne, alors en partant de \vec{a}_{cur} le jeu de paramètres actuel, on peut obtenir le jeu de paramètres optimal par :

$$\vec{a}_{opt} = \vec{a}_{cur} + \mathbf{D}^{-1} \cdot [-\nabla \chi^2(\vec{a}_{cur})]. \quad (4.16)$$

Cependant l'équation 4.15 peut être une mauvaise approximation, en particulier si les paramètres choisis pour l'initialisation de la procédure itérative sont trop éloignés des paramètres qui minimisent le χ^2 . On doit alors utiliser la méthode suivante :

$$\vec{a}_{next} = \vec{a}_{cur} - C \times [\nabla \chi^2(\vec{a}_{cur})] \quad (4.17)$$

où C est une constante. On peut réécrire les deux équations 4.16 et 4.17 en fonction des quantités :

$$\beta_k \equiv -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi^2}{\partial a_k} \quad \alpha_{kl} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_k \partial a_l}$$

ce qui donne comme expressions pour $\delta \vec{a} = \vec{a}_{min} - \vec{a}_{cur}$:

$$\sum_{l=1}^N \alpha_{kl} \delta a_l = \beta_k \quad (4.18)$$

lorsque l'approximation est "juste" et :

$$\delta a_l = C \times \beta_k \quad (4.19)$$

lorsque l'on est éloigné du minimum. La méthode de Levenberg-Marquardt consiste en un passage continu entre ces deux méthodes lorsque l'on se rapproche du minimum du χ^2 .

Marquardt fait remarquer d'abord que β_k a pour dimension $1/a_k$ puisque le χ^2 est une quantité sans dimension. La constante C dans l'équation 4.19 doit donc avoir pour dimension $1/a_k^2$. La seule quantité dimensionnée du problème ayant cette dimension est $1/a_{kk}$, l'inverse de l'élément diagonal du Hessian. La matrice de courbure donne donc, même loin du minimum, des informations sur la manière d'atteindre le minimum du χ^2 , moyennant le choix d'un facteur λ tel que l'équation 4.19 s'écrit maintenant :

$$\delta a_l = \frac{1}{\lambda \alpha_{ll}} \beta_k.$$

La seconde remarque de Marquardt permet de combiner de manière continue les équations 4.19 et 4.18. En introduisant la matrice α' :

$$\begin{aligned}\alpha'_{jj} &\equiv \alpha_{jj}(1 + \lambda) \\ \alpha'_{jk} &\equiv \alpha_{jk} \quad (j \neq k)\end{aligned}\tag{4.20}$$

On remplace alors 4.19 et 4.18 par :

$$\sum_{l=1}^N \alpha'_{kl} \delta a_l = \beta_k.\tag{4.21}$$

Lorsque λ est grand, α' est une matrice dominée par la diagonale, ce qui revient au cas 4.19. Quand λ devient petit on retrouve le cas de l'équation 4.18.

Nous avons apporté quelques modifications à cette méthode afin d'améliorer le comportement de l'ajustement. A chaque itération, on utilise quatre méthodes différentes pour calculer des déplacements dans l'espace des paramètres susceptibles de minimiser le χ^2 :

1. méthode de Levenberg-Marquardt, le déplacement vaut

$$\delta a_l = \frac{1}{\lambda \alpha_{ll}} \beta_k,$$

2. une méthode utilisant uniquement l'information sur le gradient β_k au point considéré, le déplacement est alors

$$\delta a_l = f_{norm} \lambda \beta_k,$$

où f_{norm} est un facteur de normalisation qui assure que δa_l soit plus petit qu'un déplacement maximum donné,

3. une méthode utilisant le gradient β_k et les dérivées secondes α_{kl} . La direction du déplacement est toujours donnée par le gradient mais le facteur de normalisation dépend des α_{kl} , $f_{norm} = 1/\max(\alpha_{ll})$ et

$$\delta a_l = f_{norm} \lambda \beta_k,$$

4. une méthode utilisant le gradient β_k et les dérivées secondes α_{kl} . La direction du déplacement est toujours donnée par le gradient mais le facteur de normalisation dépend des α_{kl} , $f_{norm}(l) = 1/\alpha_{ll}$ et

$$\delta a_l = f_{norm} \lambda \beta_k.$$

Ces modifications permettent d'améliorer la convergence de l'ajustement dans des cas où la dérivée seconde est quasi nulle, ou bien dans les cas où l'on est proche d'un maximum (où donc, la courbure est dans le "mauvais" sens pour l'ajustement).

Calcul des dérivées et des dérivées secondes du χ^2 Les termes α_{kl} utilisés dans les équations précédentes contiennent des dérivées premières et

secondes du modèle (ici les C_ℓ calculés par CAMB). Suivant la recommandation de (Press 1988), nous avons calculé les termes α_{kl} en négligeant les dérivées secondes du modèle.

Par ailleurs, il est important de noter que ces dérivées sont calculées sans interpolation, mais grâce aux modèles de la grille. Ce calcul des dérivées fixe l'échelle à laquelle sont évaluées toutes les grandeurs dépendant des dérivées du χ^2 , en particulier les erreurs finales obtenues par l'ajustement

Au final, l'expression de la dérivée seconde du χ^2 par rapport aux paramètres est la suivante :

$$\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \Omega_i \partial \Omega_j} = 2 \sum_{i=0}^{\ell_{max}} \frac{1}{\sigma_i^2} \left[\frac{\partial C_\ell^{th}}{\partial \Omega_i} \frac{\partial C_\ell^{th}}{\partial \Omega_j} \right].$$

Conclusion sur la méthode L'utilisation de cette méthode permet de déterminer les paramètres cosmologiques et leurs erreurs. Elle permet aussi d'accéder à la matrice des variances/covariances, appelée aussi matrice de Fisher. Cette matrice permet d'étudier, comme je le montrerai au chapitre 5, les corrélations entre les paramètres cosmologique. On peut en effet la diagonaliser pour obtenir les directions principales de dégénérescence dans l'espace des paramètres cosmologiques. On voit ici l'importance de l'interpolation, qui permet pour n'importe quel jeu de paramètres, de reconstituer le spectre de puissance à l'aide des modèles calculés au préalable.

Par ailleurs, la méthode d'interpolation est indépendante du choix du critère à minimiser. Il est ainsi à priori possible de remplacer la minimisation du χ^2 utilisée ici par une méthode de maximum de vraisemblance par exemple.

4.4.2 Parcours de l'espace des paramètres et marginalisation

Avec cette seconde méthode, l'objectif est d'avoir une vue plus globale de la forme du χ^2 , et non plus sa forme locale au voisinage du minimum. On calcule donc le χ^2 sur une grille, qui peut être totalement différente de la grille sur laquelle on a calculé les modèles cosmologiques, ceci grâce à l'interpolation multidimensionnelle présentée dans la partie 4.3.5. Cette procédure nous donne la forme du χ^2 dans l'espace des paramètres, qui est à N dimensions. Il est donc nécessaire de marginaliser le χ^2 sur un certain nombre de paramètres pour obtenir des contraintes à 2 (contours) ou une dimension.

En fait, la procédure de marginalisation, i.e. l'opération :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\Omega_i) d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_n$$

est difficile à réaliser dans notre cas. D'une part cette opération nécessiterait le calcul de modèles cosmologiques loin de la région intéressante voisinant le minimum du χ^2 , d'autre part, le fait que la grille sur laquelle ont été calculés les modèles soit finie peut entraîner un biais dans la mesure des paramètres si la probabilité n'est pas symétrique.

Pour ces deux raisons, on préfère projeter le χ^2 en maximisant la probabilité des paramètres sur lesquels on veut marginaliser. Dans le cas des contours à 2 dimensions, on parcourt l'espace des 2 paramètres et pour chaque couple (Ω_i, Ω_j) on cherche à minimiser le χ^2 , fonction des $N - 2$ paramètres (N étant toujours la dimension de l'espace des paramètres). De même, pour obtenir les barres d'erreur sur les paramètres individuels, on parcourt l'espace de chaque paramètre en minimisant le χ^2 par rapport aux $N - 1$ paramètres restants.

Cette méthode nous permet d'obtenir d'une part une information à 2 dimensions sur le comportement du χ^2 , complémentaire de l'information locale obtenue par la méthode précédente et les barres d'erreur sur les paramètres cosmologiques d'autre part.

4.4.3 Exploitation des résultats de l'ajustement

L'ajustement nous fournit comme résultat les paramètres estimés et la matrice des dérivées secondes du χ^2

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \Omega_1^2} & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \Omega_1 \partial \Omega_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \Omega_1 \partial \Omega_N} \\ \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \Omega_2 \partial \Omega_1} & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \Omega_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \Omega_2 \partial \Omega_N} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \Omega_N \partial \Omega_1} & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \Omega_N \partial \Omega_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \Omega_N^2} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Dans un cas sans corrélations entre paramètres, les incertitudes sur chacun des paramètres sont données par la racine carrée de l'inverse des termes diagonaux $\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \Omega_i^2}$ de la matrice de covariance, soit

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \Omega_i^2}}}. \quad (4.23)$$

Dans le cas de l'estimation des paramètres cosmologiques, au contraire, les corrélations entre paramètres sont importantes. L'incertitude sur le paramètre i n'est plus alors simplement le terme diagonal de la matrice de covariance, elle dépend des termes non diagonaux.

Pour estimer cette incertitude, on diagonalise la matrice de covariance, puis on calcule l'incertitude en utilisant la matrice de covariance dans l'espace où elle est diagonale

$$\sigma_i = \sum_j \sigma_j \cos \theta_j \text{ avec } \sigma_j = \sqrt{\frac{1}{\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \Omega_j^2}}} \quad (4.24)$$

où i est le paramètre dont on calcule l'incertitude, j la combinaison linéaire de paramètres dans l'espace où la matrice de covariance est diagonale, et $\cos \theta_j$ les angles de rotation entre l'espace des paramètres cosmologiques et l'espace où la matrice des covariances est diagonale.

4.5 Test de l'interpolation multilinéaire. Amélioration de l'interpolation

Je vais maintenant décrire les tests menés pour évaluer la précision de l'interpolation. Les résultats de ces tests m'ont amené à trouver une méthode d'interpolation plus précise que je décrirai dans la partie 4.5.2.

4.5.1 Test de l'interpolation multilinéaire

Pour évaluer la précision de l'interpolation présentée, j'ai utilisé deux tests statistiques différents :

- le premier test consiste à calculer la différence relative entre un spectre de puissance calculé numériquement et un spectre interpolé, puis à conserver le maximum de cette différence relative :

$$Diff_{relat} = Max \left[\frac{C(\ell)_{CAMB} - C(\ell)_{interp}}{C(\ell)_{CAMB}} \right]_{\ell} \quad (4.25)$$

- le deuxième test consiste à construire un jeu de mesures fictif à partir d'un modèle théorique en lui attribuant une erreur et un échantillonnage, puis à calculer le χ^2 par degré de liberté (n_{ddl}) :

$$\Delta\chi^2 = \frac{1}{n_{ddl}} \sum_i^N \left(\frac{C(\ell)_{CAMB} - C(\ell)_{interp}}{\sigma_i} \right)^2 \quad (4.26)$$

On applique ces tests à un grand nombre de modèles cosmologiques dont les paramètres sont tirés au hasard pour évaluer de manière statistique la précision de l'interpolation.

Résultat de l'interpolation linéaire Dans le cas du calcul de $\Delta\chi^2$, les erreurs sont calculées à partir de la formule 4.12. Les erreurs de “type Planck” ont été calculées avec les paramètres donnés en 5.3. Les erreurs de “type WMAP” ont été calculées avec les paramètres donnés en 5.2.

Les figures 5.20 et 5.3 du chapitre 5 représentent des “mesures” de C_ℓ typiques obtenues avec respectivement les erreurs de type “Planck” et les erreurs de type “WMAP”.

Les figures 4.12 (gauche), 4.12 (droite) et 4.13 montrent les résultats de cette analyse.

La moyenne de $Diff_{relat}$ est de 10%, les $\Delta\chi^2$ ont pour moyenne respectivement 0.27 et 0.09 (données type Planck et WMAP). On constate que dans le cas de données de type Planck et pour la base de données de modèles utilisée, l'interpolation n'atteint pas une précision suffisante. Dans le cas de données de type WMAP, l'erreur commise ne semble pas être importante, mais on remarque un certains nombre de points à $\Delta\chi^2 > 0.5$, ce qui peut être une source d'erreur dans un processus d'ajustement de paramètres.

On peut comprendre en regardant les figure 4.14 et 4.15 l'origine des différences entre le modèle calculé et le modèle interpolé.

On voit que la principale cause d'erreur dans l'interpolation vient du fait que la structure des pics est effacée. Ce problème est dû au fait que

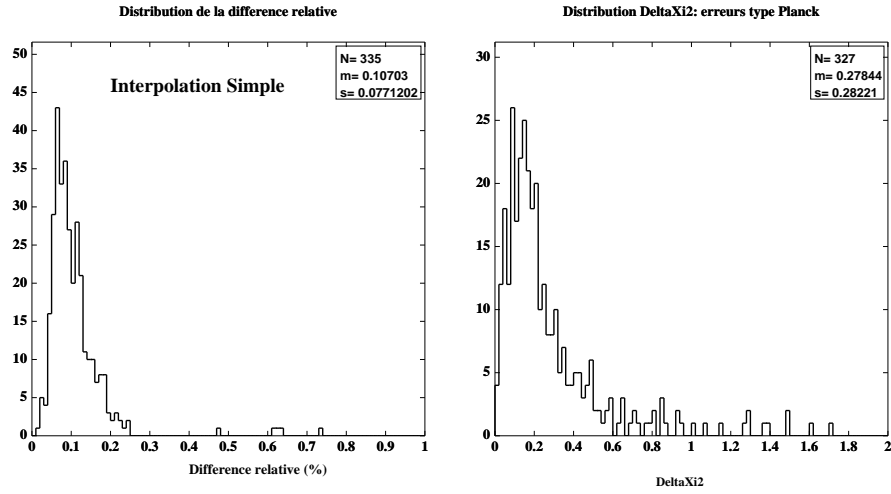


FIG. 4.12 – **Gauche** : Distribution du maximum de la différence relative tel que défini dans 4.25 pour 335 modèles. N représente le nombre de modèle utilisés, m , la moyenne et s le sigma de la distribution . **Droite** : Distribution du $\Delta\chi^2$ tel que défini dans 4.26 pour 335 modèles pour des erreurs de type “Planck”.

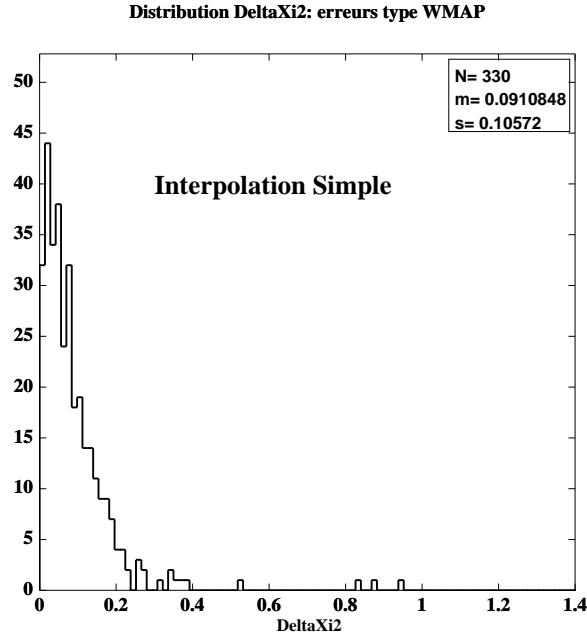


FIG. 4.13 – Distribution du $\Delta\chi^2$ tel que défini dans 4.26 pour 335 modèles pour des erreurs de type “WMAP”.

les courbes de C_ℓ utilisées pour réaliser l’interpolation sont décalées en ℓ . Il est donc possible de tenter de corriger cet effet en appliquant un facteur d’échelle à chacune des courbes de C_ℓ avant d’en faire la moyenne pondérée.

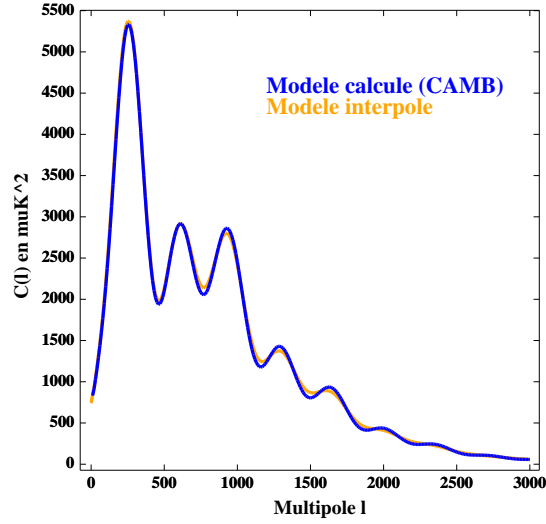


FIG. 4.14 – Comparaison entre le modèle calculé (bleu) et le modèle interpolé (orange). On note, en particulier à haut ℓ , un effacement des pics, qui est responsable des différences observées entre les modèles calculés et les modèles interpolés.

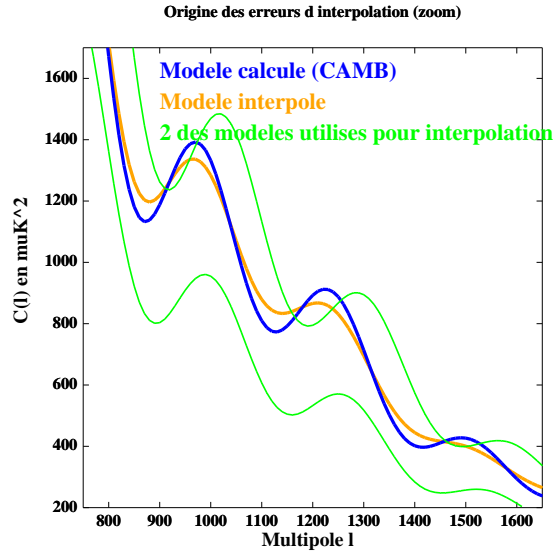


FIG. 4.15 – Comparaison entre le modèle calculé (bleu) et le modèle interpolé (orange). On a agrandi la région autour de $\ell = 1200$ pour mieux voir l'origine des différences entre l'interpolation et le modèle calculé. En vert, deux des modèles utilisés dans l'interpolation. Le décalage entre les pics de ces modèles est à l'origine de l'effacement des pics dans le modèle interpolé.

4.5.2 Amélioration de l'interpolation

Comme on l'a vu dans le chapitre 2, on peut calculer l'échelle acoustique et la position du premier pic du spectre de C_ℓ à l'aide d'un modèle semi analytique. Notre objectif étant de supprimer le décalage en ℓ responsable de l'effacement des pics, il est naturel d'utiliser cette échelle pour dilater ou contracter la variable ℓ .

Plus précisément, pour chaque modèle à interpoler $C(\ell)$, pour un jeu de paramètres $\{\Omega_i\}$, on calcule l'échelle angulaire as (pour échelle acoustique) du modèle. Puis on calcule pour chaque modèle utilisé dans l'interpolation $C(\ell)_i$ l'échelle acoustique associée $(as)_i$. On calcule alors

$$C(\ell) = \sum_{i=0}^{2^{dim}} w(i) C(\ell \times \frac{as}{as_i})_i, \quad w(i) = f(d_1, d_2). \quad (4.27)$$

Les modèles utilisés dans l'interpolation sont dilatés d'un facteur $\alpha_i = \frac{as}{as_i}$. La figure 4.16 résume la nouvelle méthode d'interpolation.

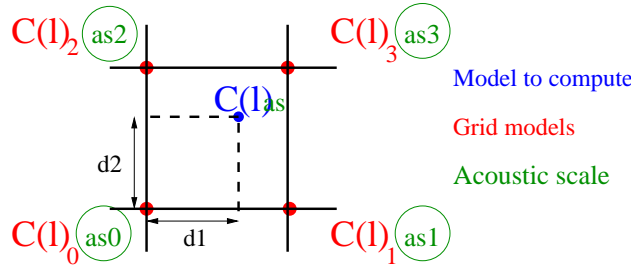


FIG. 4.16 – Schéma décrivant la nouvelle interpolation. Le modèle à interpoler $C(\ell)$ est une moyenne pondérée des modèles $C(\ell)_i$ qui ont été au préalable dilatés ou contractés pour tenir compte des différences d'échelle acoustique.

Résultats de la nouvelle interpolation ⁵

On peut voir sur les figures 4.17 à 4.21 les résultats pour la nouvelle méthode d'interpolation. On constate que le problème apparent sur les figures 4.14 et 4.15 a été résolu par la nouvelle méthode d'interpolation. Ceci est confirmé par les tests statistiques déjà effectués sur la méthode la plus simple d'interpolation. Dans le cas de la différence relative, la moyenne de la distribution est passée de $\simeq 10\%$ à $\simeq 7\%$. Pour les mesures de type Planck, l'erreur est très réduite par notre interpolation (de $\Delta\chi^2 \simeq 0.22$ à $\Delta\chi^2 \simeq 0.08$ en moyenne). Le résultat sur la moyenne pour les données de type WMAP est moins probant ($\Delta\chi^2 \simeq 0.1$ contre $\Delta\chi^2 \simeq 0.07$ en moyenne), mais on a éliminé une grande partie des points avec un $\Delta\chi^2 > 0.2$ ce qui est important dans le processus de minimisation, puisqu'on ne sait pas à l'avance où va passer la minimisation dans l'espace des paramètres.

⁵Les résultats pour les mesures de type Planck ont été obtenu avec la base de données fine, les résultats pour les données de type WMAP avec la base de données grossière.

On voit donc que cette nouvelle méthode d'interpolation permet d'obtenir à partir d'un ensemble de modèles cosmologiques une plus grande précision que la méthode présentée initialement. Ce gain peut être utilisé soit pour, à nombre de modèle égal, avoir une meilleure précision, soit garder la même précision en ayant besoin d'un nombre de modèle plus réduit, ce qui peut être crucial pour une expérience de précision comme Planck.

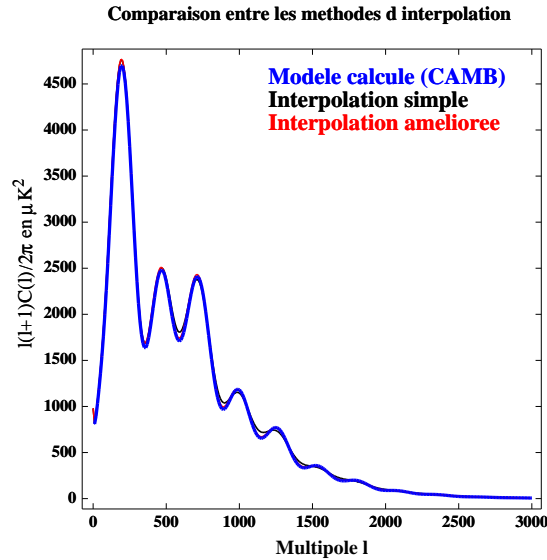


FIG. 4.17 – Courbes de C_l obtenues par le calcul direct du modèle (par CAMB, en bleu), par la méthode d'interpolation présentée au 4.3.5 (en noir), et la nouvelle méthode d'interpolation utilisant le calcul semi-analytique de la distance diamètre angulaire présenté au 4.5.2 (en rouge).

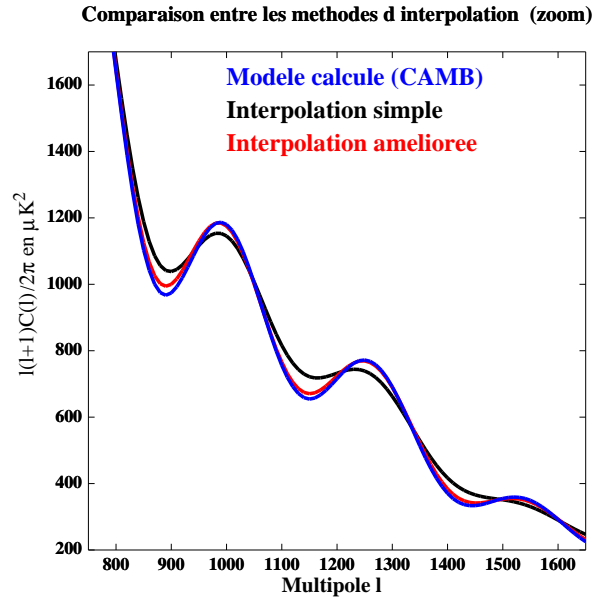


FIG. 4.18 – *Agrandissement de la courbe des C_ℓ . Les courbes de C_ℓ sont obtenues par le calcul direct du modèle (par CAMB, en bleu), par la méthode d'interpolation présentée au 4.3.5 (en noir), et la nouvelle méthode d'interpolation 4.5.2 (en rouge).*

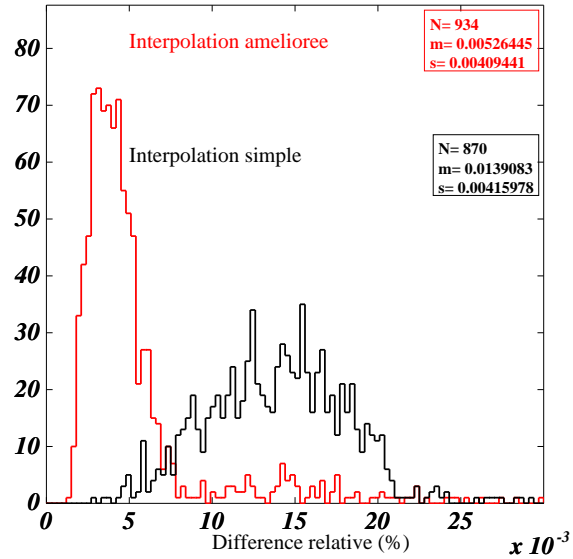


FIG. 4.19 – *Distribution du maximum de la différence relative tel que défini dans 4.25 pour 1000 modèles, en utilisant la nouvelle méthode d'interpolation*

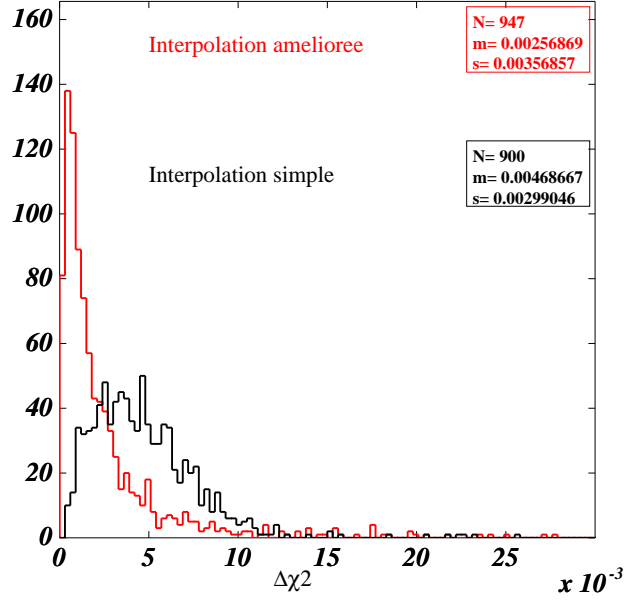


FIG. 4.20 – *Distribution du $\Delta\chi^2$ tel que défini dans 4.26 pour 1000 modèles pour des erreurs de type “Planck”. Ces résultats ont été obtenus avec la base de données la plus précise disponible 5.2.*

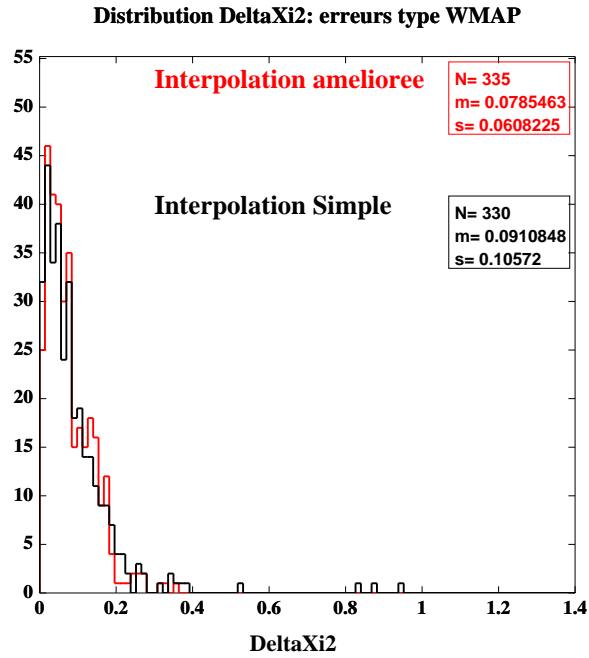


FIG. 4.21 – *Distribution du $\Delta\chi^2$ tel que défini dans 4.26 pour 335 modèles pour des erreurs de type “WMAP”.*

Bibliographie

- Bartlett, J. G., Douspis, M., Blanchard, A., & Le Dour, M. 2000, *Astronomy and Astrophysics Supplement*, 146, 507
- Borrill, J., 1999, MADCAP - The Microwave Anisotropy Dataset Computational Analysis Package, astro-ph/9911389
- Doré, O., Teyssier, R., Bouchet, F. R., Vibert, D., & Prunet, S. 2001, *Astronomy and Astrophysics*, 374, 358
- Hamilton J., Internal collaboration note “Map Making”
- Hivon, E., Górski, K. M., Netterfield, C. B., Crill, B. P., Prunet, S., & Hansen, F. 2002, *Astrophysical Journal*, 567, 2
- Knox, L. 1995, *Physical Review D*, 52, 4307
- Press, H. W., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., “Numerical Recipes in C”, 1988, Cambridge University Press
- Seljak, U. & Zaldarriaga, M. 1996, *Astrophysical Journal* , 469, 437
- Tegmark, M. Zaldarriaga, M. 2000, *Astrophysical Journal*, 544, 30
- Verde, L., et al. 2003, *Astrophysical Journal Supplement*, 148, 195
- Wang, X., Tegmark, M., Jain, B., & Zaldarriaga, M. 2003, *Physical Review D*, 68, 123001

Chapitre 5

Estimation des paramètres cosmologiques à partir de la courbe de C_ℓ

Dans le chapitre précédent, j’ai exposé les principes de notre méthode d’ajustement des paramètres cosmologiques. Je vais maintenant développer cette méthode et présenter ici les résultats obtenus au cours de ma thèse.

Je commencerai par une étude statistique des performances de l’ajustement, effectuée sur des simulations, dans un cas correspondant à la précision actuelle des mesures. Puis je présenterai des résultats concernant des données simulées reproduisant la précision des mesures de Planck. Enfin j’appliquerai les méthodes présentées ici et dans le chapitre 4 aux données actuelles (Archeops, WMAP et CBI).

Dans la première partie, je vais m’intéresser à une estimation des performances de notre ajustement sur des données simulées. Pour ce faire je présenterai rapidement la méthode utilisée, puis des résultats publiés par des auteurs utilisant des méthodes différentes, les résultats de notre méthode et les conclusions que l’on peut tirer de cette analyse sur les performances de l’ajustement.

5.1 Méthode utilisée

Pour estimer les performances de l’ajustement des paramètres cosmologiques, nous avons fait une analyse Montecarlo comportants les étapes suivantes

- on effectue un tirage aléatoire d’un ensemble de quelques milliers de jeux de paramètre cosmologiques,
- on calcule les modèles correspondants à ces paramètres cosmologiques, plus exactement les spectres de puissance C_ℓ ,
- pour chaque modèle, on produit des données simulées en assignant une erreur gaussienne à chaque valeur de C_ℓ , prenant en compte la variance cosmique et le bruit blanc du processus d’observation, suivant l’expression 4.12 du chapitre 4. Les valeurs individuelles des C_ℓ ainsi obtenues sont ensuite moyennées sur des bandes en ℓ (“binning”)

suivant les conditions expérimentales. On obtient alors un ensemble de points de mesures et leurs erreurs.

Puis nous effectuons l'ajustement proprement dit, qui se fait en plusieurs étapes :

- on calcule le χ^2 pour quelques milliers de modèles de la base de données répartis aléatoirement sur la grille. On sélectionne ensuite le meilleur, ce qui permet de choisir le point de départ de l'ajustement,
- on effectue l'ajustement, en plusieurs fois, pour éviter les minima secondaires, en fixant à chaque fois un ou plusieurs paramètres. Au total on effectue 4 ajustements avant un dernier ajustement où tous les paramètres sont libres,
- on effectue aussi un ajustement en un seul passage qui nous sert de référence.

Enfin, on sélectionne avec des coupures les ajustements ayant convergé dans de bonnes conditions. Le χ^2 doit être inférieur à une valeur seuil, dans notre cas, $\chi^2 < 500$ pour les données simulées de type WMAP (95 degrés de liberté), $\chi^2 < 5000$ pour les données simulées de type Planck (2495 degrés de liberté). L'ajustement doit par ailleurs avoir convergé vers un minimum local. Ceci est vérifié en examinant la matrice de covariance. On effectue une diagonalisation de la matrice des covariances, ce qui est réalisé techniquement par une méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD pour singular Value Decomposition (Press 1988)). On obtient ainsi la direction des axes principaux et les valeurs propres correspondantes. Pour un minimum local, toutes ces valeurs propres sont strictement positives. Les vecteurs propres (axes principaux) correspondent aux combinaisons linéaires des paramètres, qui sont déterminés de manière indépendante (sans corrélation).

Nous calculons ensuite la différence entre les paramètres du modèle cosmologique “vrai” et les paramètres du modèle cosmologique ajusté, divisés par la barre d'erreur obtenue par l'ajustement

$$\frac{\Omega_i^{vrai} - \Omega_i^{fit}}{\sigma_i},$$

et nous étudions la distribution de cette quantité. Si les erreurs issues de l'ajustement sont fiables, nous devons trouver que la moyenne de cette distribution est nulle et que son écart-type (σ) proche de 1.

Nous étudions aussi les corrélations entre les paramètres cosmologiques en étudiant les distributions à deux dimensions suivantes :

$$\frac{\Omega_i^{vrai} - \Omega_i^{fit}}{\sigma_i} \text{ vs } \frac{\Omega_j^{vrai} - \Omega_j^{fit}}{\sigma_j}, \quad i \neq j.$$

Enfin notre analyse nous permet d'avoir accès aux corrélations à trois dimensions :

$$\frac{\Omega_i^{vrai} - \Omega_i^{fit}}{\sigma_i} \text{ vs } \frac{\Omega_j^{vrai} - \Omega_j^{fit}}{\sigma_j} \text{ vs } \frac{\Omega_k^{vrai} - \Omega_k^{fit}}{\sigma_k}, \quad i \neq j \neq k.$$

Les grilles de paramètres cosmologique utilisées sont les suivantes :

Pour donner une idée de la taille relative de ces grilles, j'ai représenté dans le plan $(\Omega_{cdm}, \Omega_\Lambda)$ l'étendue des deux grilles (figure 5.1).

TAB. 5.1 – *Table des paramètres cosmologiques de la grille étendue.*

	Ω_b	Ω_{CDM}	Ω_Λ	H_0	n_s	Nombre total
paramètre min	0.02	0.1	0.	50	0.9	
paramètre max	0.06	0.74	0.8	100	1.2	
pas	0.002	0.02	0.01	10	0.1	
nb pas	21	32	41	6	4	661248

TAB. 5.2 – *Table des paramètres cosmologiques de la grille fine.*

	Ω_b	Ω_{CDM}	Ω_Λ	H_0	n_s	Nombre total
paramètre min	0.042	0.2	0.68	50	0.9	
paramètre max	0.048	0.26	0.73	80	1.1	
pas	0.0006	0.006	0.005	2.5	0.02	
nb pas	11	11	11	13	11	190333

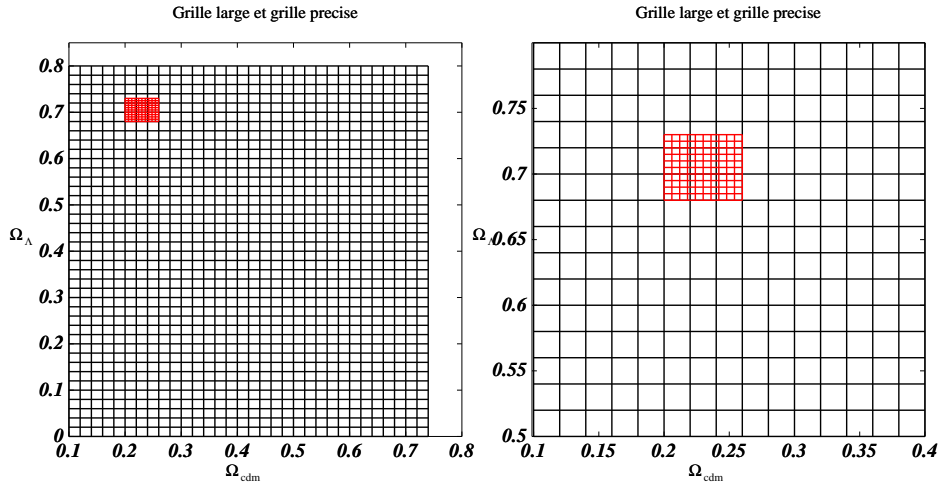


FIG. 5.1 – *Taille relative des grilles fine et étendue dans le plan $(\Omega_{\text{cdm}}, \Omega_\Lambda)$.*

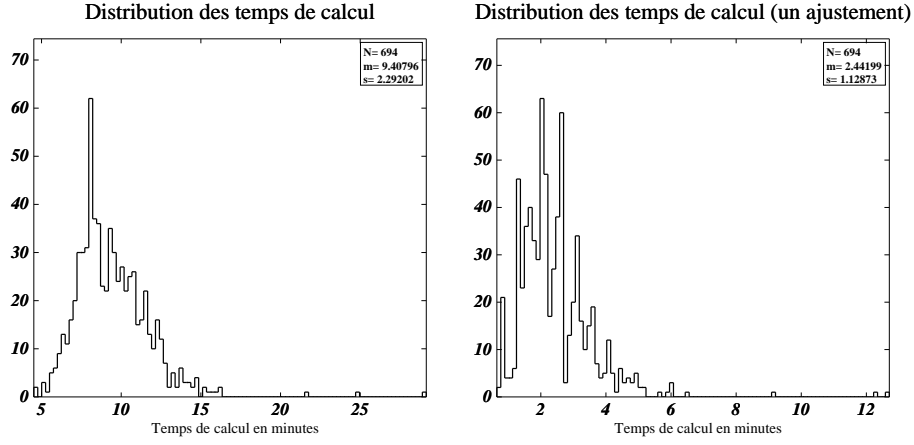


FIG. 5.2 – **Gauche** : *Distribution du temps total CPU pour l'estimation des paramètres cosmologiques.* **Droite** : *Distribution du temps CPU pour l'estimation des paramètres cosmologiques par l'ajustement en une seule étape.*

5.1.1 Ajustement et temps de calcul

J'ai mentionné précédemment que la rapidité de notre analyse est un de ses avantages. Le processus d'estimation comprend 5 ajustements successifs (pour des raisons de vérifications) et un ajustement en une seule fois, ainsi qu'une phase d'initialisation (voir §5.1). La distribution du temps total de l'estimation (figure 5.2, à gauche) a pour moyenne 32 minutes, sur des ordinateurs de type Intel Xeon à 2.4 GHz pour la plupart. L'ajustement en une seule passe (figure 5.2, à droite) prend en moyenne 6 minutes, alors que l'initialisation prend 4 minutes, ce qui permettrait d'effectuer une estimation de paramètres cosmologiques et de la matrice des erreurs en une dizaine de minutes (Machine monoprocesseur à 2.5 GHz).

5.2 Résultats : simulations de type WMAP

Je présente dans cette section les résultats de l'analyse décrite au §5.1 appliquée au cas où les erreurs sont typiques des données disponibles actuellement. La figure 5.3 montre un exemple des erreurs simulées utilisées dans cette analyse, qui ont été calculées avec les caractéristiques suivantes (et la formule 4.12 du chapitre 4) :

- bruit blanc : $30 \mu K$ par pixel carré de 8 minutes d'arc de coté
- largeur à mi hauteur du lobe de l'antenne de l'instrument : 8 minutes d'arc
- couverture spectrale en ℓ : de 15 à 1500, par bandes de 15 unités en ℓ , ce qui correspond à 100 mesures indépendantes au total.

Les ajustements ont été réalisés en utilisant la base de données étendue uniquement (pas la base de données fines).

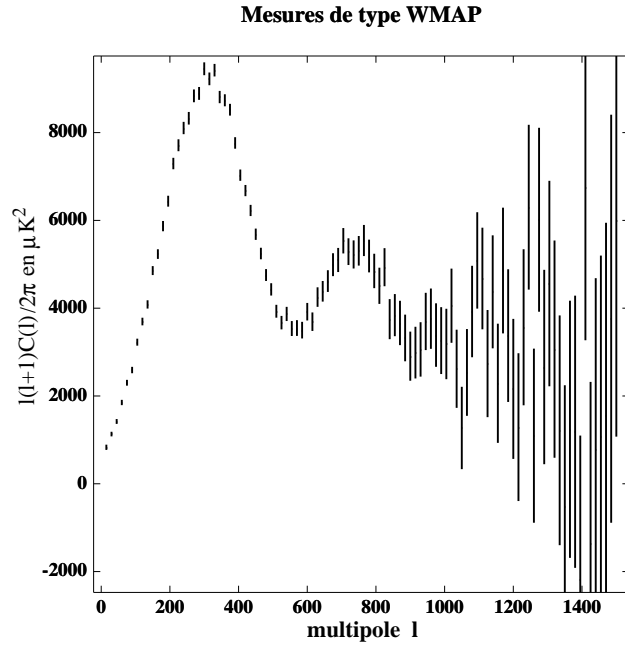


FIG. 5.3 – Mesures de “type WMAP” calculées à partir de la formule 4.12 et des caractéristiques données au §5.2.

5.2.1 Mesures générées à partir d’un modèle CAMB

Dans cette partie, les erreurs sont générées à partir d’un modèle calculé par CAMB. La figure 5.4 représente la distribution des χ^2 obtenus par l’ajustement. Le nombre de degrés de liberté est de 95 (100 mesures de C_ℓ et cinq paramètres à déterminer). On constate que la distribution a une moyenne très proche de cette valeur de χ^2 . Les figures 5.5 montrent comment le χ^2 du modèle ajusté se compare au modèle avec les vrais paramètres initiaux. Le χ^2 du modèle ajusté est en moyenne plus petit que le χ^2 du modèle vrai : Ce comportement est attendu pour un ajustement parfait ($\langle \Delta\chi^2 \rangle = N_{param}$).

Les figures 5.6 à 5.8 représentent les distributions de la quantité

$$\frac{\Omega_i^{vrai} - \Omega_i^{fit}}{\sigma_i}$$

pour les cinq paramètres étudiés ici.

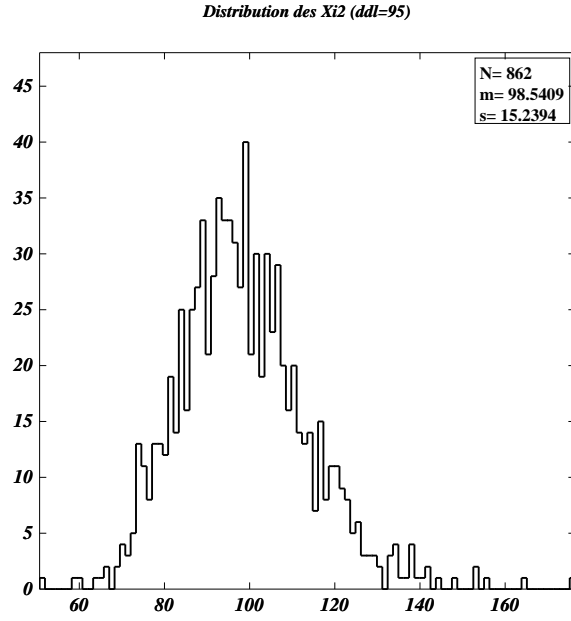


FIG. 5.4 – *Distribution des χ^2 obtenus par l’ajustement des paramètres cosmologiques pour des données de type “WMAP”. Le nombre de degrés de liberté est de 95. Données générées à partir d’un modèle CAMB.*

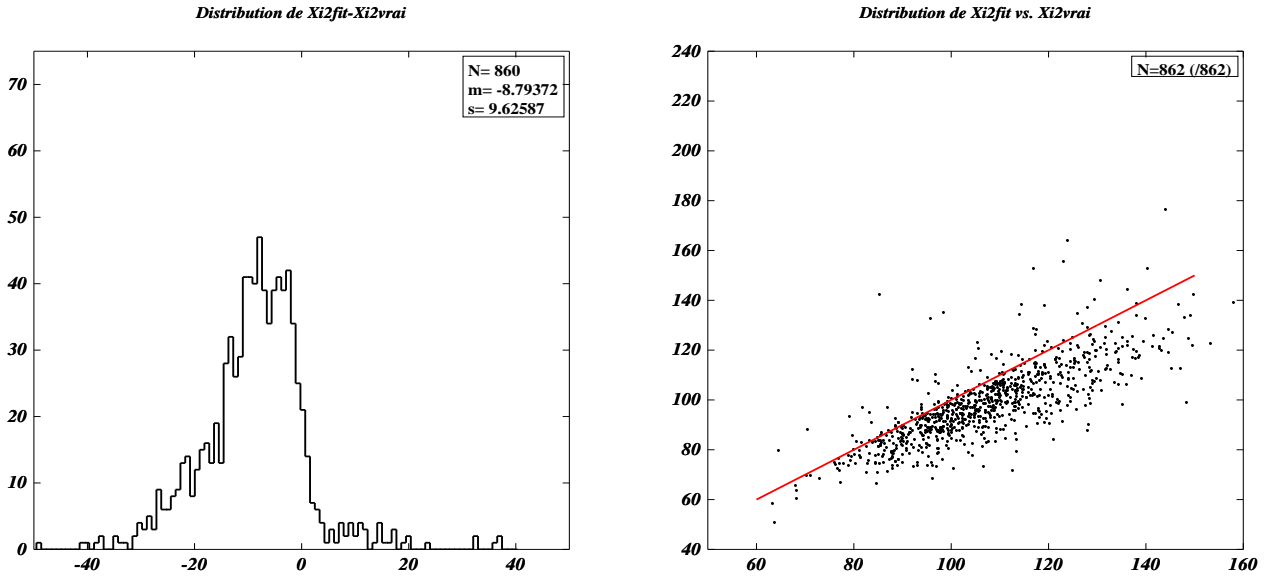


FIG. 5.5 – **Gauche** : *Distribution de la différence entre le χ^2 du modèle ajusté et le χ^2 du modèle vrai. $\Delta\chi^2 = \chi^2_{modèle} - \chi^2_{fit}$. **Droite** : *Valeur du χ^2 du modèle ajusté en fonction de la valeur du χ^2 du modèle vrai. La droite rouge correspond à $\chi^2_{fit} = \chi^2_{vrai}$. Données générées à partir d’un modèle CAMB.**

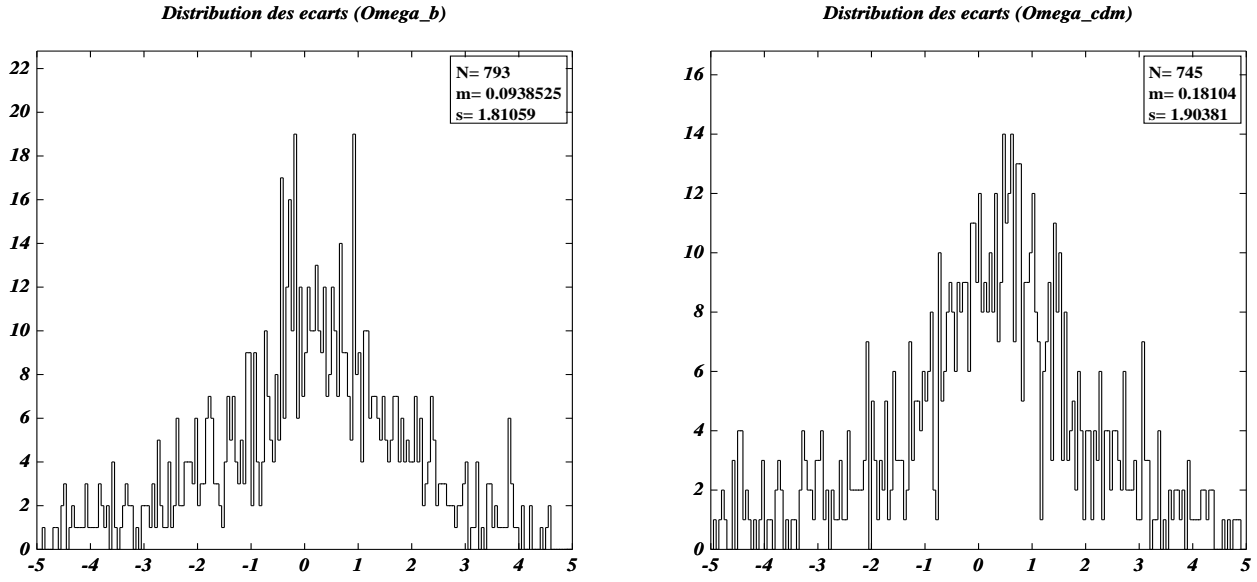


FIG. 5.6 – *Distribution des écarts pour des données générées à partir d'un modèle CAMB et des erreurs de type "WMAP". Gauche : Distribution de la quantité $(\Omega_b^{vrai} - \Omega_b^{fit})/\sigma_{\Omega_b}$, pour la densité de matière baryonique. Droite : Distribution de la quantité $(\Omega_{cdm}^{vrai} - \Omega_{cdm}^{fit})/\sigma_{\Omega_{cdm}}$, pour la densité de matière noire froide.*

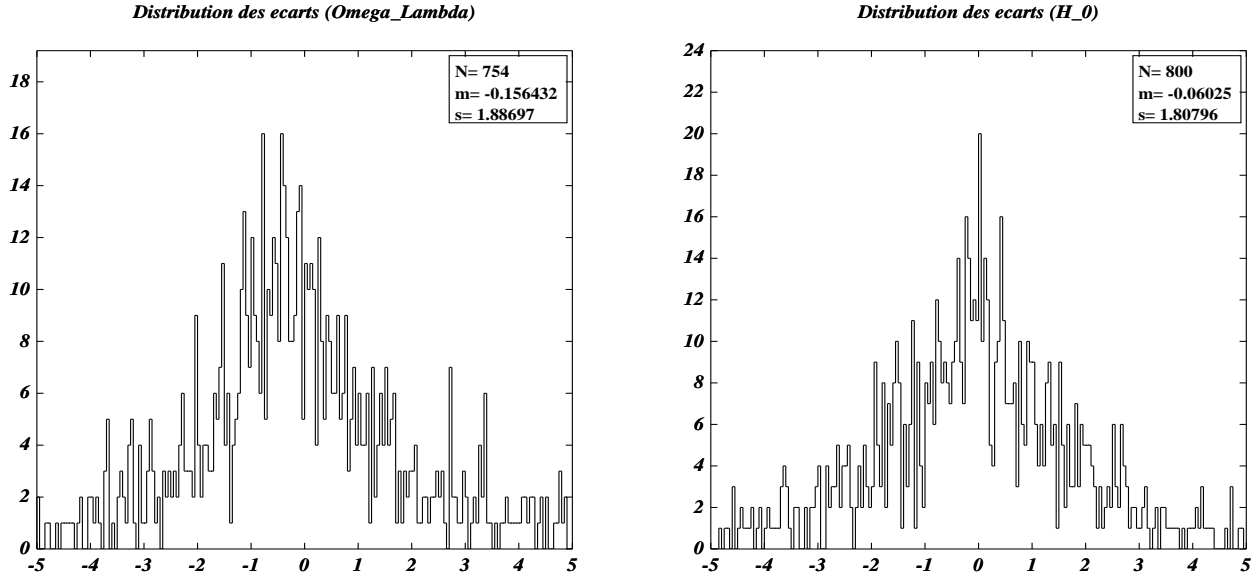


FIG. 5.7 – *Distribution des écarts pour des données générées à partir d'un modèle CAMB et des erreurs de type "WMAP". Gauche : Distribution de la quantité $(\Omega_{\Lambda}^{vrai} - \Omega_{\Lambda}^{fit})/\sigma_{\Omega_{\Lambda}}$, pour la densité d'énergie noire sous forme de constante cosmologique. Droite : Distribution de la quantité $(H_0^{vrai} - H_0^{fit})/\sigma_{H_0}$, pour la constante de Hubble..*

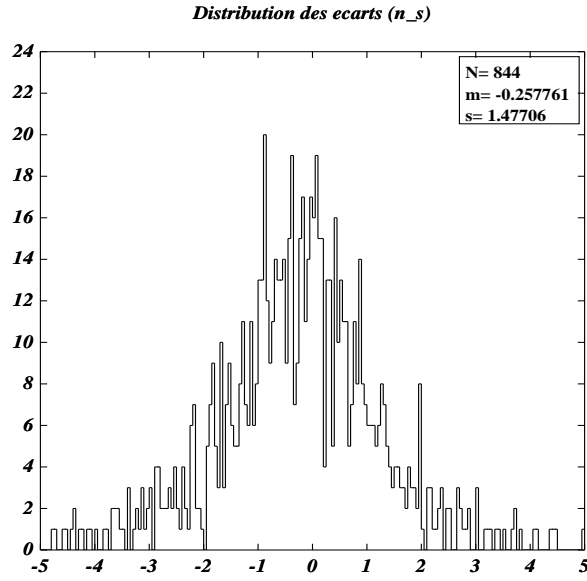


FIG. 5.8 – Distribution de la quantité $\frac{n_s^{vrai} - n_s^{fit}}{\sigma_{n_s}}$, pour l'indice spectral scalaire. Erreurs de type WMAP et Données générées à partir d'un modèle CAMB.

On remarque que l'ajustement a convergé dans plus de 85 % (861/1000) des cas. Par ailleurs, les moyennes des distributions sont compatibles avec 0 et les écarts-types obtenus sont relativement proches de 1 ($\sigma \simeq 1.5 - 2$). Cependant, le modèle initial utilisé pour générer les données simulées est un modèle calculé par CAMB, alors que les modèles utilisés par l'ajustement sont des modèles interpolés. Nous avons donc effectué la même analyse avec un modèle initial interpolé à la place du modèle calculé par CAMB, afin de s'affranchir de l'effet de l'interpolation sur les performances de l'ajustement.

5.2.2 Mesures générées à partir d'un modèle interpolé

Pour les résultats présentés dans cette section, les données sont générées à partir d'un spectre de puissance obtenu par interpolation des modèles stockés dans la base de données, avec des erreurs typiques des expériences actuelles (erreurs dites "WMAP"). Les distributions présentées correspondent à l'ajustement de $\simeq 3500$ lots de mesures, générées à partir de $\simeq 1000$ jeux de paramètres cosmologiques différents répartis sur l'ensemble de l'hypercube couvert par la base de données (5.1).

Les figures 5.9 et 5.10 représentent les distributions des χ^2 obtenus ainsi que la comparaison avec le χ^2 du modèle ayant servi à générer les données.

Comme dans le cas où l'on avait généré les données à partir d'un modèle CAMB, les figures 5.11 à 5.13 représentent les distributions de la quantité

$$\frac{\Omega_i^{vrai} - \Omega_i^{fit}}{\sigma_i}$$

pour les 5 paramètres étudiés ici.

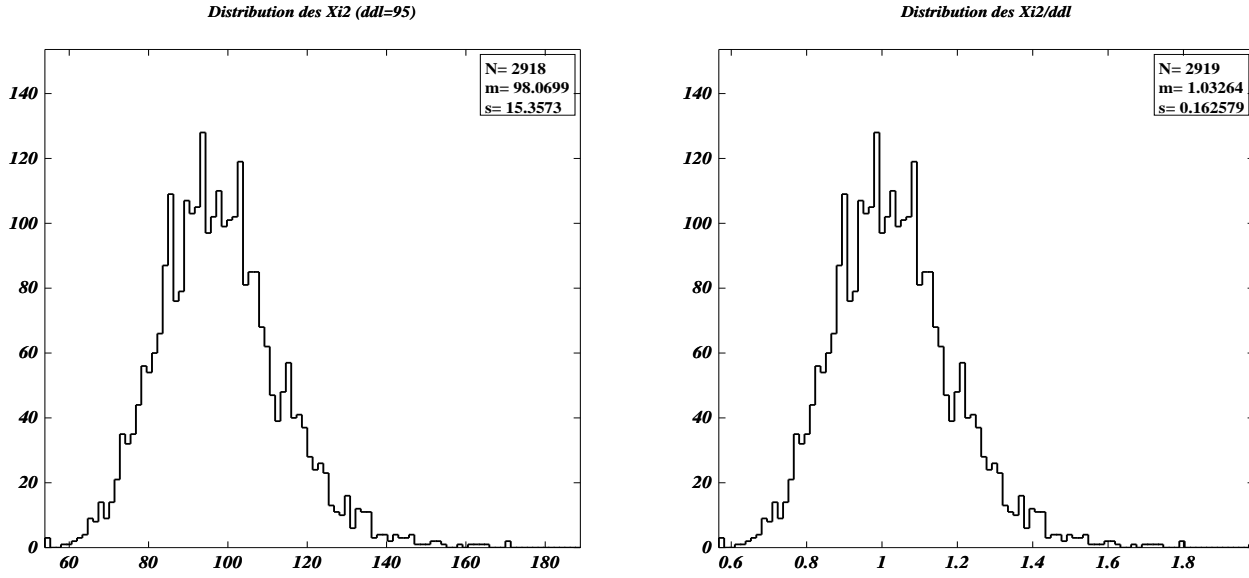


FIG. 5.9 – **Gauche** : Distribution des χ^2 obtenus par l'ajustement des paramètres cosmologiques pour des données de type “WMAP”. **Droite** : Distribution des χ^2 par degré de liberté obtenus par l'ajustement des paramètres cosmologiques pour des données de type “WMAP”. Le nombre de degrés de liberté est de 95 (100 points de mesure et 5 paramètres).

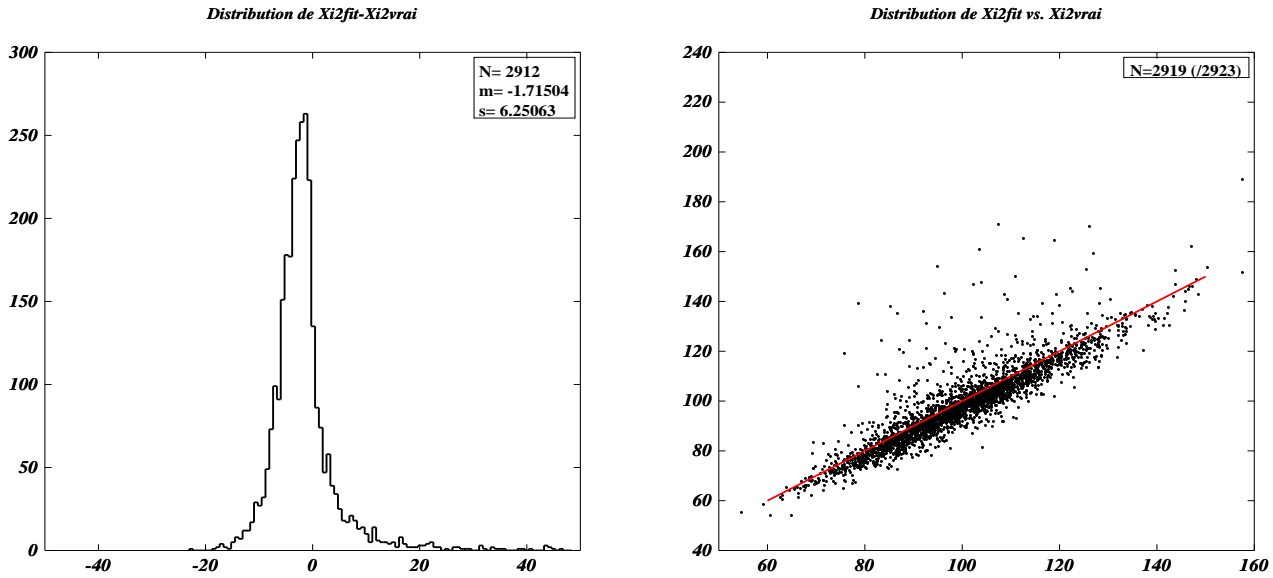


FIG. 5.10 – **Gauche** : Distribution de la différence entre le χ^2 du modèle ajusté et le χ^2 du modèle vrai. **Droite** : Valeur du χ^2 du modèle ajusté en fonction de la valeur du χ^2 du modèle vrai. La droite rouge représente le lieu où $\chi^2_{fit} = \chi^2_{vrai}$. Erreurs WMAP et modèle généré à partir de la base de données par une interpolation.

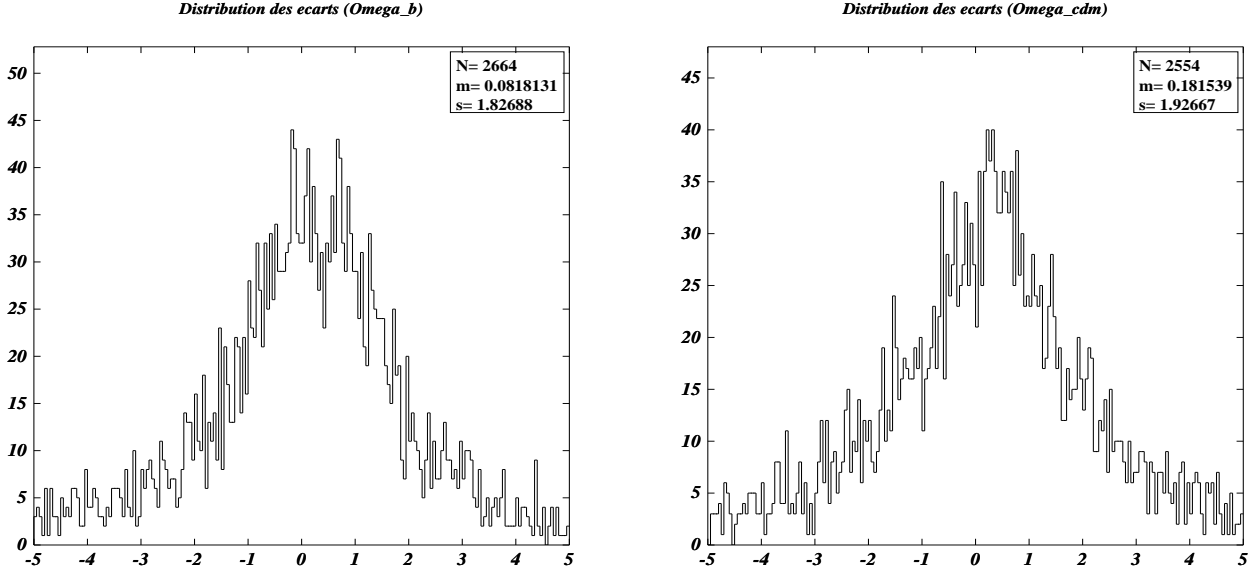


FIG. 5.11 – *Distribution des écarts pour des données générées à partir d'un modèle interpolé et des erreurs de type "WMAP". Gauche : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_b^{vrai} - \Omega_b^{fit}}{\sigma_{\Omega_b}}$, pour la densité de matière baryonique. Droite : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{cdm}^{vrai} - \Omega_{cdm}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{cdm}}}$, pour la densité de matière noire froide.*

L'ajustement a convergé dans plus de 89 % (2923/3253) des cas. Par ailleurs, les moyennes des distributions sont compatibles avec 0 et les écarts-types obtenus sont proches de 1 ($\sigma \simeq 2$). Ces distributions donnent une bonne idée de la fiabilité de l'ajustement pour ce type de données. Elles confirment les résultats obtenus dans la partie 5.2.1. Elles confirment aussi les résultats du chapitre 4 concernant la précision de notre interpolation.

5.2.3 Corrélations entre les paramètres ajustés

L'information contenue dans la matrice des variances-covariances ne se résume bien sûr pas aux erreurs sur les paramètres individuels. Celle-ci permet aussi de connaître la corrélation entre l'estimation des différents paramètres.

Nous étudions dans ce paragraphe les corrélations à deux dimensions, à travers la quantité

$$\frac{\Omega_i^{vrai} - \Omega_i^{fit}}{\sigma_i} \text{ vs } \frac{\Omega_j^{vrai} - \Omega_j^{fit}}{\sigma_j}, \quad i \neq j$$

dont la distribution nous informe sur les corrélations à deux dimensions existant lors de la détermination des paramètres cosmologiques, pour des mesures de type WMAP.

On peut voir sur ces figures des corrélations particulièrement nettes entre plusieurs paramètres :

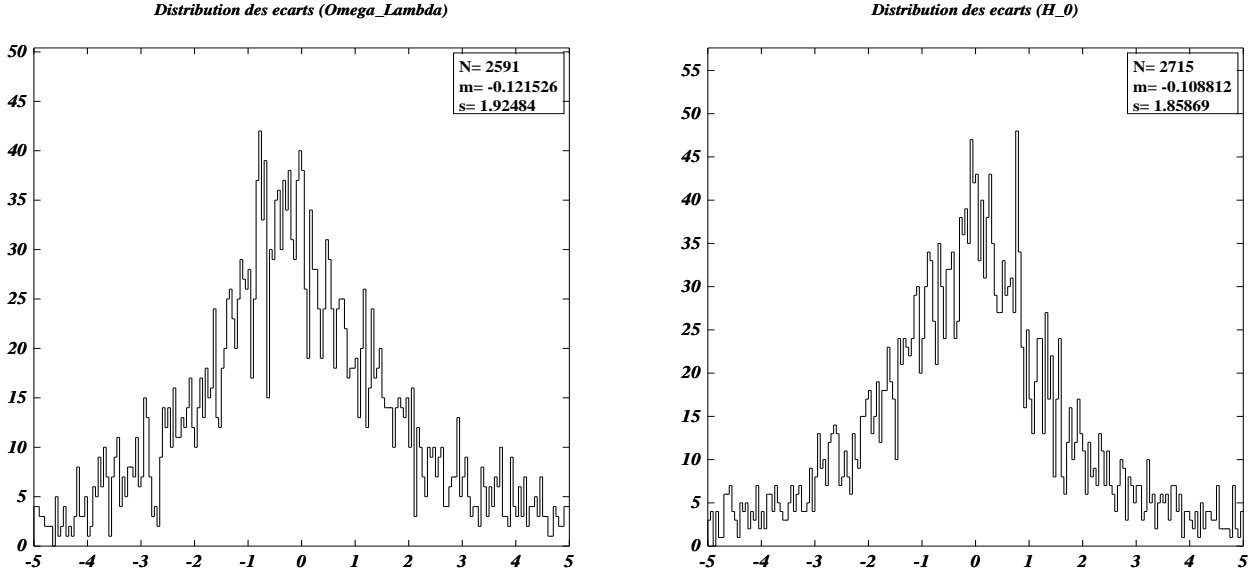


FIG. 5.12 – *Distribution des écarts pour des données générées à partir d'un modèle interpolé et des erreurs de type "WMAP". Gauche : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{\Lambda}^{vrai} - \Omega_{\Lambda}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{\Lambda}}}$, pour la densité d'énergie noire sous forme de constante cosmologique. Droite : Distribution de la quantité $\frac{H_0^{vrai} - H_0^{fit}}{\sigma_{H_0}}$, pour la constante de Hubble.*

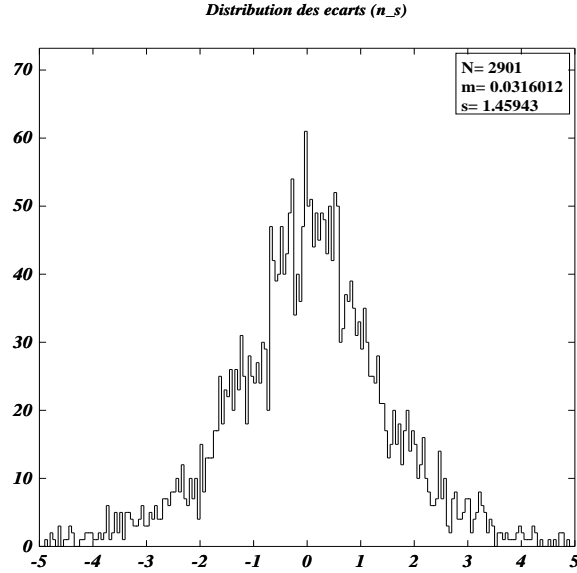


FIG. 5.13 – *Distribution des écarts pour des données générées à partir d'un modèle interpolé et des erreurs de type "WMAP". Distribution de la quantité $\frac{n_s^{vrai} - n_s^{fit}}{\sigma_{n_s}}$, pour l'indice spectral scalaire.*

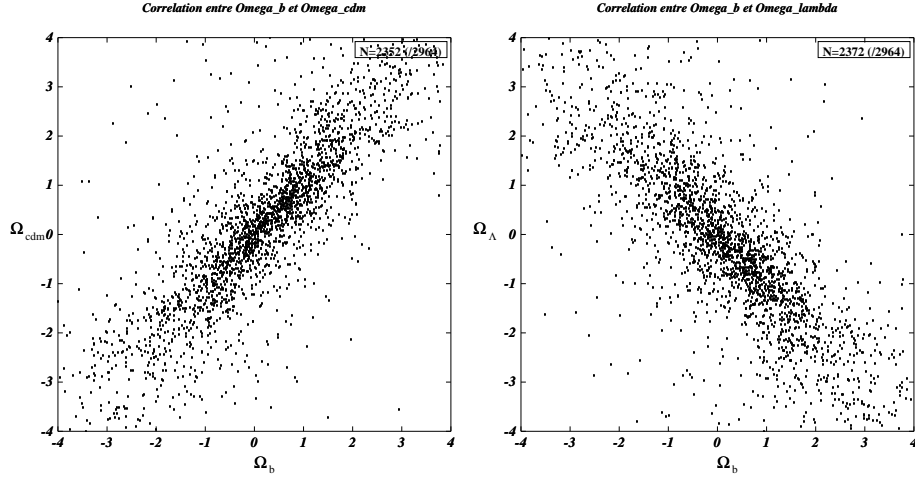


FIG. 5.14 – Erreurs de type “WMAP” et données générées à partir d’un modèle interpolé. **Gauche** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_b^{vrai} - \Omega_b^{fit}}{\sigma_{\Omega_b}}$ vs $\frac{\Omega_{cdm}^{vrai} - \Omega_{cdm}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{cdm}}}$. **Droite** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_b^{vrai} - \Omega_b^{fit}}{\sigma_{\Omega_b}}$ vs $\frac{\Omega_{\Lambda}^{vrai} - \Omega_{\Lambda}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{\Lambda}}}$.

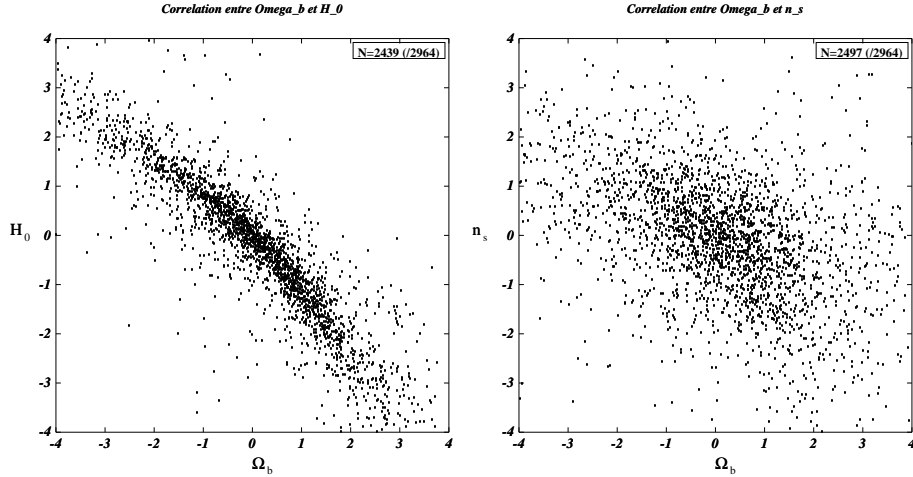


FIG. 5.15 – Erreurs de type “WMAP” et données générées à partir d’un modèle interpolé. **Gauche** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_b^{vrai} - \Omega_b^{fit}}{\sigma_{\Omega_b}}$ vs $\frac{H_0^{vrai} - H_0^{fit}}{\sigma_{H_0}}$. **Droite** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_b^{vrai} - \Omega_b^{fit}}{\sigma_{\Omega_b}}$ vs $\frac{n_s^{vrai} - n_s^{fit}}{\sigma_{n_s}}$.

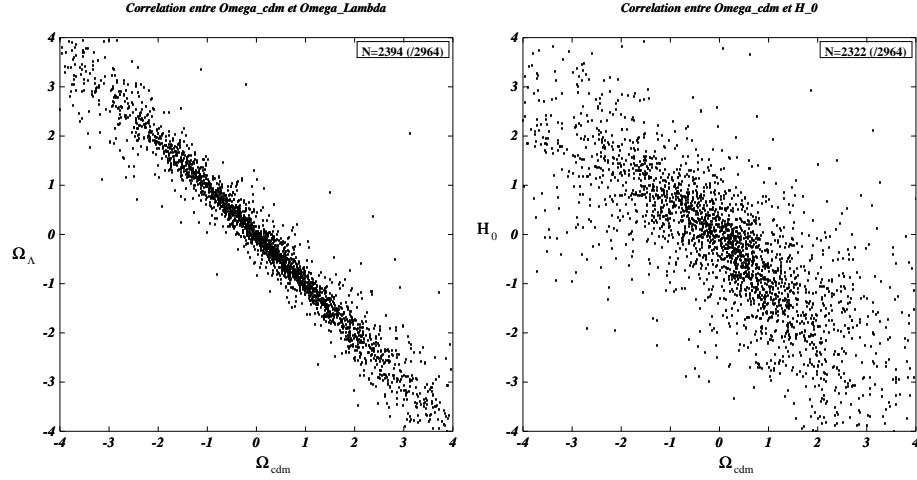


FIG. 5.16 – Erreurs de type “WMAP” et données générées à partir d’un modèle interpolé. **Droite** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{\text{cdm}}^{\text{vrai}} - \Omega_{\text{cdm}}^{\text{fit}}}{\sigma_{\Omega_{\text{cdm}}}} \text{ vs } \frac{\Omega_{\Lambda}^{\text{vrai}} - \Omega_{\Lambda}^{\text{fit}}}{\sigma_{\Omega_{\Lambda}}}$. **Gauche** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{\text{cdm}}^{\text{vrai}} - \Omega_{\text{cdm}}^{\text{fit}}}{\sigma_{\Omega_{\text{cdm}}}} \text{ vs } \frac{H_0^{\text{vrai}} - H_0^{\text{fit}}}{\sigma_{H_0}}$.

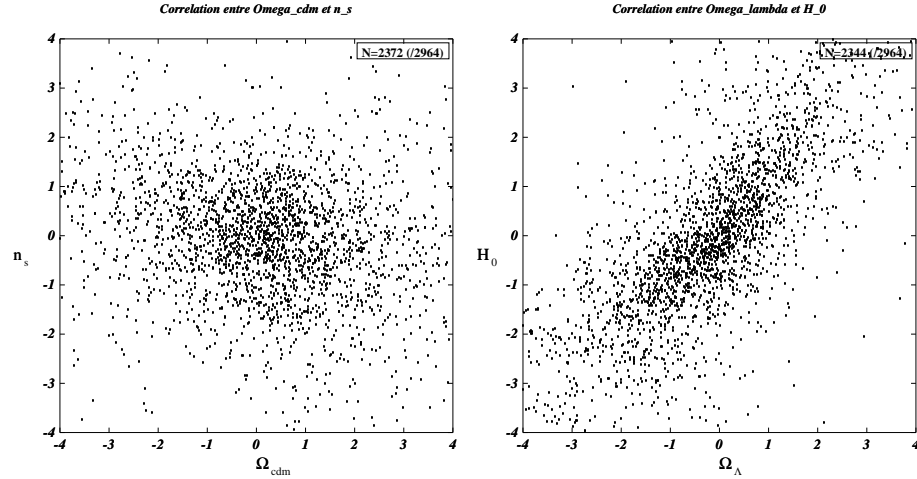


FIG. 5.17 – Erreurs de type “WMAP” et données générées à partir d’un modèle interpolé. **Gauche** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{\text{cdm}}^{\text{vrai}} - \Omega_{\text{cdm}}^{\text{fit}}}{\sigma_{\Omega_{\text{cdm}}}} \text{ vs } \frac{n_s^{\text{vrai}} - n_s^{\text{fit}}}{\sigma_{n_s}}$. **Droite** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{\Lambda}^{\text{vrai}} - \Omega_{\Lambda}^{\text{fit}}}{\sigma_{\Omega_{\Lambda}}} \text{ vs } \frac{H_0^{\text{vrai}} - H_0^{\text{fit}}}{\sigma_{H_0}}$.

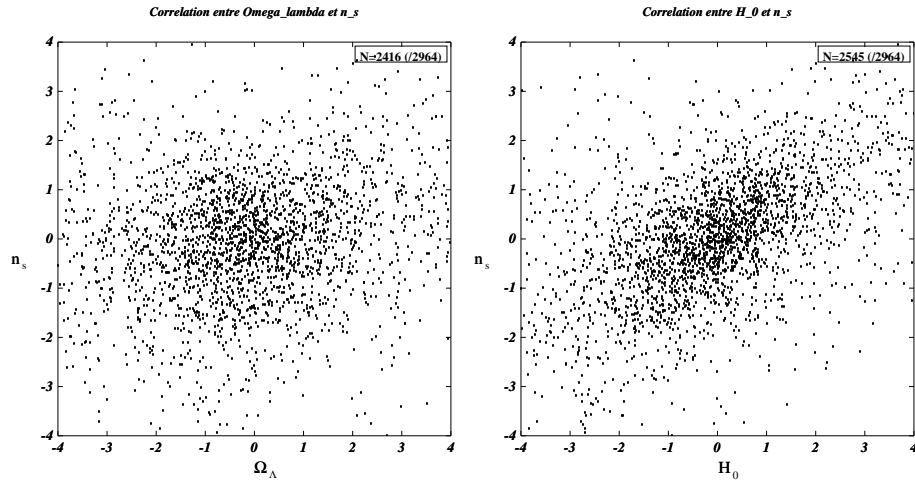


FIG. 5.18 – Erreurs de type “WMAP” et données générées à partir d’un modèle interpolé. **Gauche** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{\Lambda}^{vrai} - \Omega_{\Lambda}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{\Lambda}}}$ vs $\frac{n_s^{vrai} - n_s^{fit}}{\sigma_{n_s}}$. **Droite** : Distribution de la quantité $\frac{H_0^{vrai} - H_0^{fit}}{\sigma_{H_0}}$ vs $\frac{n_s^{vrai} - n_s^{fit}}{\sigma_{n_s}}$.

- entre Ω_{cdm} et Ω_b (figure 5.14, gauche),
- entre Ω_{Λ} et Ω_b (figure 5.14, droite).
- entre Ω_b et H_0 (figure 5.15, gauche),
- entre Ω_{cdm} et Ω_{Λ} (figure 5.16, gauche),
- entre Ω_{cdm} et H_0 (figure 5.16, droite),

Par contre, on voit aussi que n_s est relativement découplé des autres paramètres, en particulier de Ω_{cdm} et Ω_{Λ} . La corrélation entre Ω_b et H_0 s’explique par le fait que c’est la densité $\rho_b = \Omega_b H_0^2$ qui est le paramètre physique à prendre en compte dans les calculs du spectre de puissance (notamment le calcul du redshift de découplage z_{dec}).

Enfin, à titre d’exemple, on a représenté une corrélation à 3 dimensions (figure 5.19). Bien que ce genre de distribution soit plus difficile à interpréter, on voit l’existence de corrélations entre trois paramètres, assez clairement visibles pour le triplet $(\Omega_b, \Omega_{cdm}, \Omega_{\Lambda})$

5.2.4 Conclusion partielle

Les tests présentés ici nous permettent de conclure, dans le cas des erreurs typiques des expériences actuelles, que :

- la procédure d’ajustement fonctionne comme prévu (pas de problème de convergence),
- les erreurs issues de la procédure d’ajustement des paramètres cosmologiques sont compatibles avec les distributions statistiques des écarts obtenues dans les simulation Monte-Carlo (distribution des $\frac{\Omega_i^{vrai} - \Omega_i^{fit}}{\sigma_i}$), avec cependant un facteur $\simeq 2$ entre les erreurs calculées par l’ajustement et l’écart entre les paramètres vrais et les paramètres ajustés,

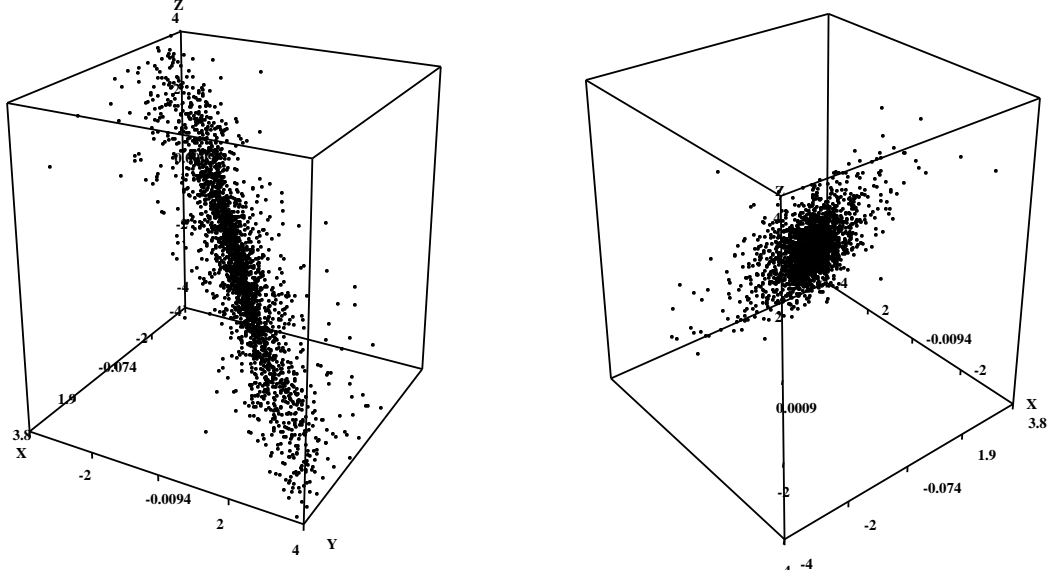


FIG. 5.19 – Deux vues différentes de la distribution 3D des quantités $\frac{\Omega_b^{vrai} - \Omega_b^{fit}}{\sigma_{\Omega_b}}$, $\frac{\Omega_{cdm}^{vrai} - \Omega_{cdm}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{cdm}}}$, $\frac{\Omega_{\Lambda}^{vrai} - \Omega_{\Lambda}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{\Lambda}}}$. Sur l'axe X est porté Ω_b , sur l'axe Y, Ω_{cdm} , et sur l'axe Z, Ω_{Λ} .

- l'interpolation n'introduit pas, pour les erreurs typiques des mesures actuelles, d'incertitude ou d'effet systématique significatifs.

Nous pourrions donc appliquer cette méthode aux données actuelles, en ayant confiance dans les résultats obtenus.

5.3 Résultats : simulations de type Planck

Je présente dans cette section les résultats de l'analyse décrite au 5.1 appliquée au cas où les erreurs sont typiques de celles attendues pour l'instrument embarqué à bord du satellite Planck. La figure 5.20 montre un exemple des erreurs simulées utilisées dans cette analyse, qui ont été calculées avec les caractéristiques suivantes (et la formule 4.12 du chapitre 4) :

- bruit blanc : $5 \mu K$ par pixel carré de 5 minutes d'arc de coté
- largeur à mi hauteur du lobe d'antenne : 5 minutes d'arc
- couverture spectrale en ℓ : de 2 à 2500, avec une mesure par multipole ℓ (2499 mesures).

5.3.1 Mesures générées à partir d'un modèle CAMB

Dans cette partie, les mesures sont générées à partir d'un modèle calculé par CAMB. Les figures 5.21 montrent comment le χ^2 du modèle ajusté se compare au modèle avec les vrais paramètres initiaux. Comme attendu, le χ^2 du modèle ajusté est en moyenne plus petit que le χ^2 du modèle vrai.

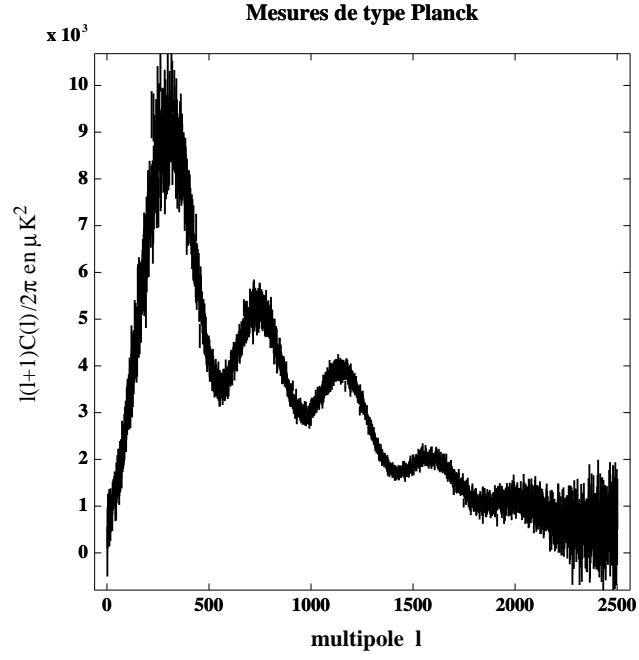


FIG. 5.20 – Mesures de “type Planck” calculées à partir de la formule 4.12 et des caractéristiques données au §5.3.

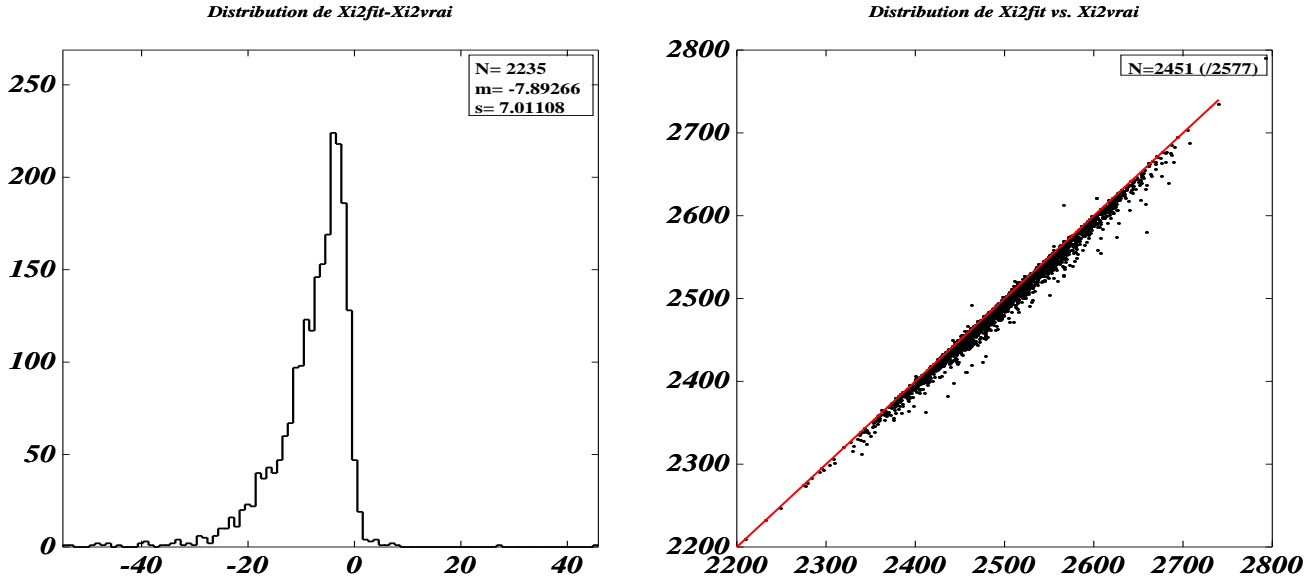


FIG. 5.21 – **Gauche** : Distribution de la différence entre le χ^2 du modèle ajusté et le χ^2 du modèle vrai. **Droite** : Valeur du χ^2 du modèle ajusté en fonction de la valeur du χ^2 du modèle vrai. La droite rouge représente le lieu où $\chi^2_{fit} = \chi^2_{vrai}$. Erreurs de type Planck et modèle généré par CAMB.

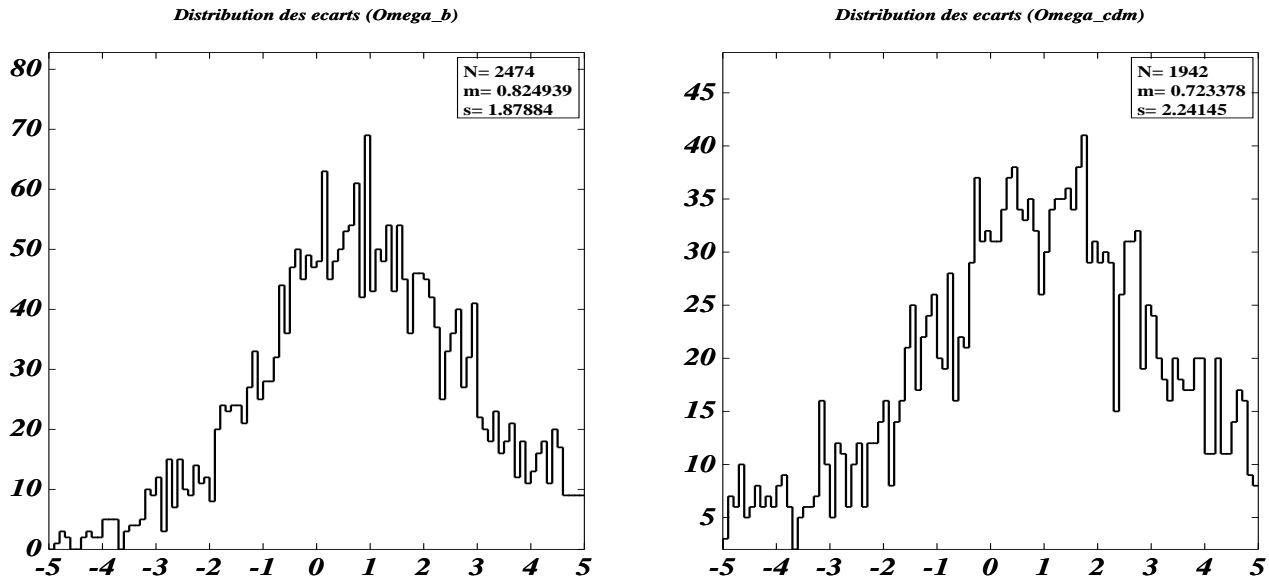


FIG. 5.22 – **Gauche** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_b^{vrai} - \Omega_b^{fit}}{\sigma_{\Omega_b}}$, pour la densité de matière baryonique. **Droite** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{cdm}^{vrai} - \Omega_{cdm}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{cdm}}}$, pour la densité de matière noire froide. Erreurs de type Planck et modèle généré par CAMB.

Les figures 5.22 et 5.23 représentent les distributions de la quantité

$$\frac{\Omega_i^{vrai} - \Omega_i^{fit}}{\sigma_i}$$

pour 3 des 5 paramètres étudiés ici.

On constate que l'écart-type de ces distributions est relativement proches de 1 ($\sigma \simeq 2 - 2.5$), bien que plus grand que dans le cas des mesures de type WMAP, ce qui indique que les barres d'erreurs fournies par la procédure d'ajustement sont relativement correctes. Par contre, on observe un biais important dans l'estimation des paramètres cosmologiques (c'est aussi vérifié pour n_s et H_0)

Ces écarts systématiques sont dûs à la différence entre le modèle CAMB et le modèle interpolé. La figure 5.24 représente la valeur du χ^2 autour du minimum, pour un jeu donné de paramètres cosmologiques. On a représenté, sur une droite reliant dans l'espace des paramètres les paramètres cosmologiques du modèle vrai et ceux du modèle ajusté, les valeurs de χ^2 obtenues pour le modèle CAMB et pour le modèle interpolé correspondant. On peut voir un léger décalage du minimum du χ^2 , et donc des paramètres correspondants à ce minimum. Nous verrons que cet effet disparaît lorsque les mesures sont générées à partir d'un modèle interpolé (§5.3.2).

Pour améliorer ce résultat, deux approches sont possibles :

- soit une amélioration de la précision de l'interpolation par une grille plus fine,

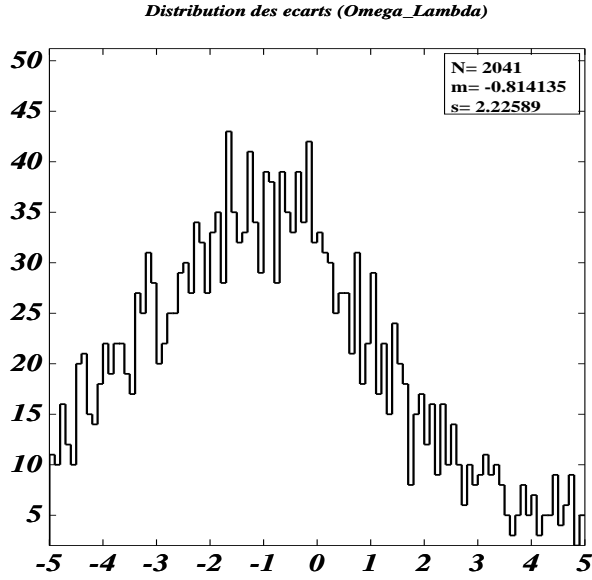


FIG. 5.23 – Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{\Lambda}^{vrai} - \Omega_{\Lambda}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{\Lambda}}}$, pour la densité d'énergie noire sous forme de constante cosmologique. Erreurs de type Planck et modèle généré par CAMB.

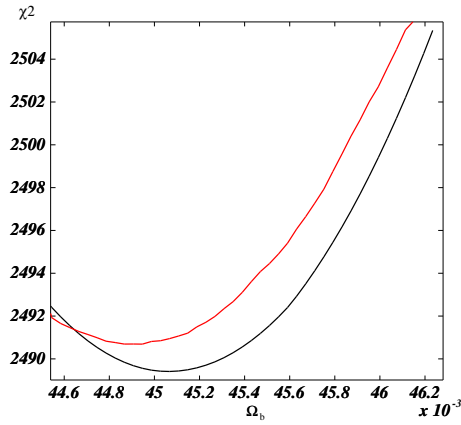


FIG. 5.24 – Valeur du χ^2 autour du minimum, sur une droite reliant, dans l'espace des paramètres, les paramètres cosmologiques du modèle vrai et ceux du modèle ajusté. En rouge, le χ^2 calculé avec la base de données, en noir le χ^2 calculé directement avec CAMB. On peut voir un léger décalage du minimum du χ^2 , et donc des paramètres correspondants à ce minimum.

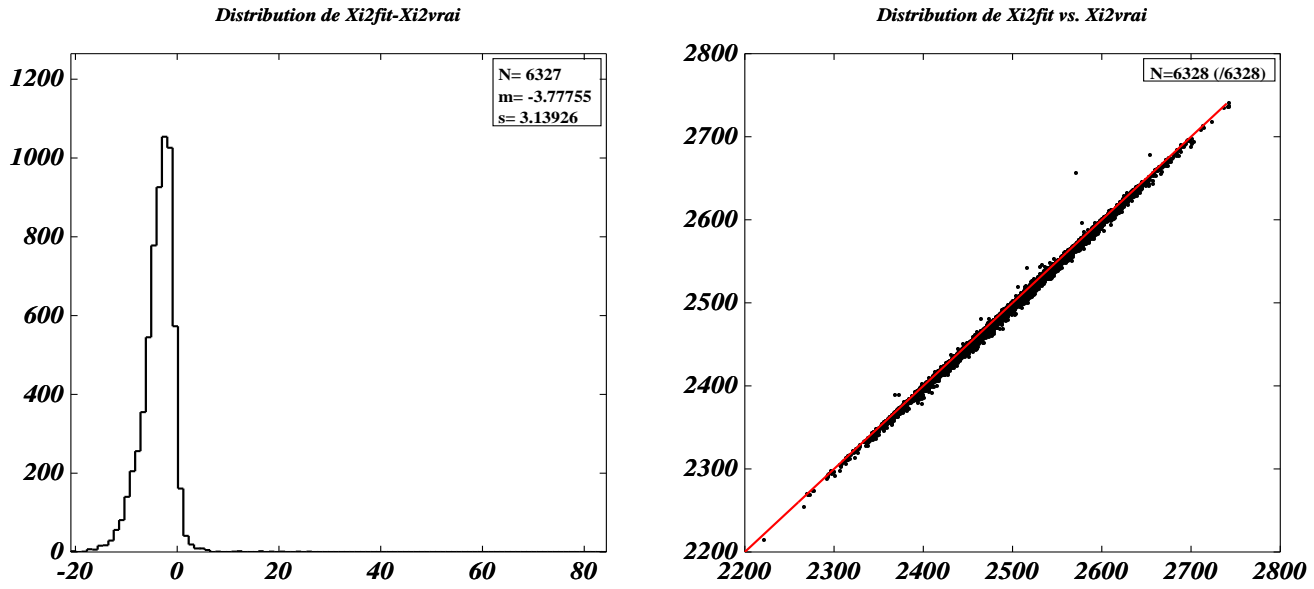


FIG. 5.25 – **Gauche** : Distribution de la différence entre le χ^2 du modèle ajusté et le χ^2 du modèle vrai. **Droite** : Valeur du χ^2 du modèle ajusté en fonction de la valeur du χ^2 du modèle vrai. La droite rouge correspond à $\chi^2_{fit} = \chi^2_{vrai}$. Erreurs de type Planck et modèle généré à partir des modèles de la base de données, par interpolation.

- soit l'utilisation directe de CAMB pour calculer les modèles lors de l'ajustement.

Afin de préserver la rapidité de la procédure, ces deux approches peuvent être appliquées uniquement dans une phase “finale” de l'ajustement qui utilise comme paramètres de départ les paramètres estimés par l'ajustement utilisant la base de données actuelle.

5.3.2 Mesures générées à partir d'un modèle interpolé

Ici c'est un modèle obtenu par interpolation à partir de la base de données qui est utilisé pour générer les mesures. Les distributions présentées correspondent à l'ajustement d'environ 6800 lots de mesures, générées à partir d'un millier de jeux de paramètres cosmologiques différents répartis sur l'ensemble de l'hypercube couvert par la base de données fine (5.2). Les figures 5.25 montrent comment le χ^2 du modèle ajusté se compare au modèle avec les vrais paramètres initiaux. Le χ^2 du modèle ajusté est ici en moyenne plus petit que le χ^2 du modèle vrai, ce qui est conforme aux attentes.

Les figures 5.26, 5.27 et 5.28 représentent les distributions de la quantité

$$\frac{\Omega_i^{vrai} - \Omega_i^{fit}}{\sigma_i}$$

pour les 5 paramètres étudiés ici.

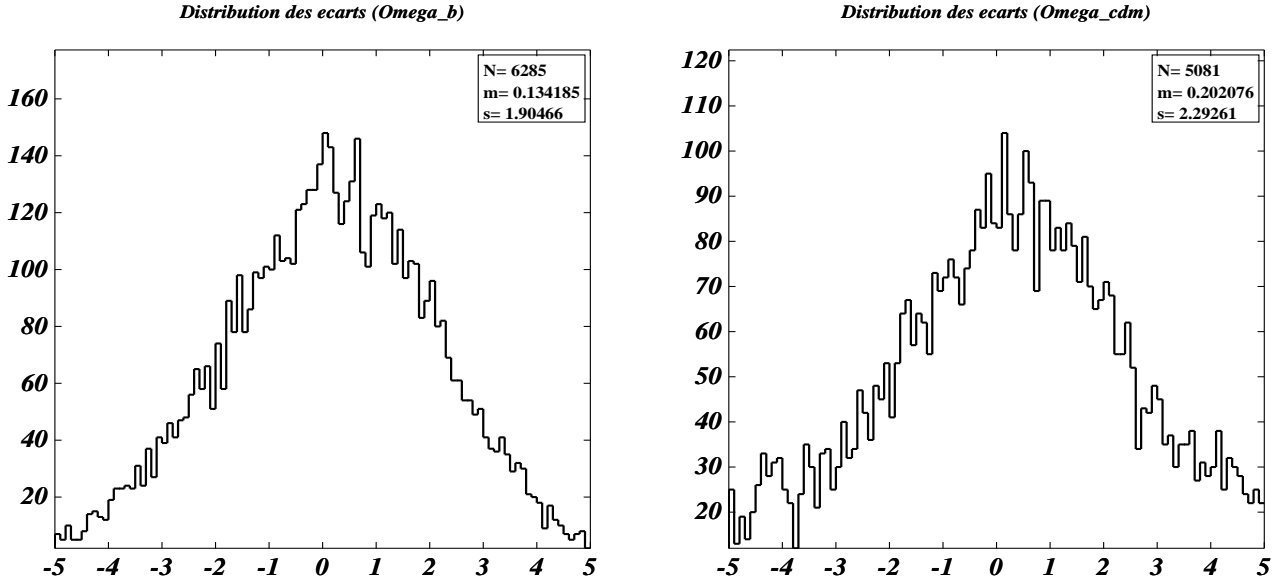


FIG. 5.26 – **Gauche** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_b^{vrai} - \Omega_b^{fit}}{\sigma_{\Omega_b}}$, pour la densité de matière baryonique. **Droite** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{cdm}^{vrai} - \Omega_{cdm}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{cdm}}}$, pour la densité de matière noire froide. Erreurs de type Planck et modèle généré à partir des modèles de la base de données, par interpolation.

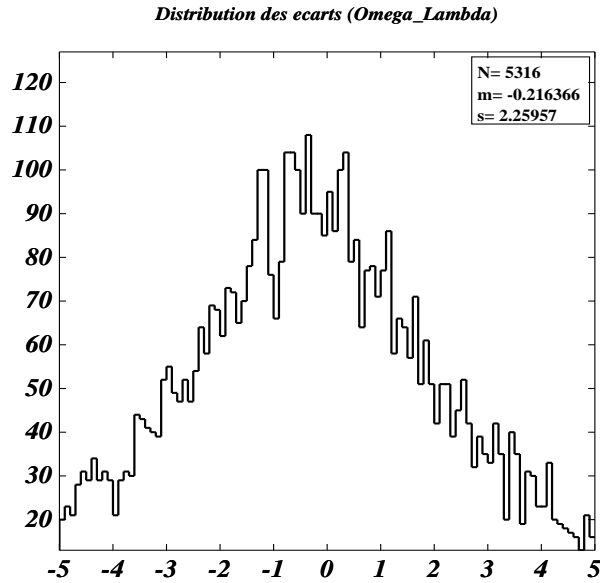


FIG. 5.27 – Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{\Lambda}^{vrai} - \Omega_{\Lambda}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{\Lambda}}}$, pour la densité d'énergie noire sous forme de constante cosmologique. Erreurs de type Planck et modèle généré à partir des modèles de la base de données, par interpolation.

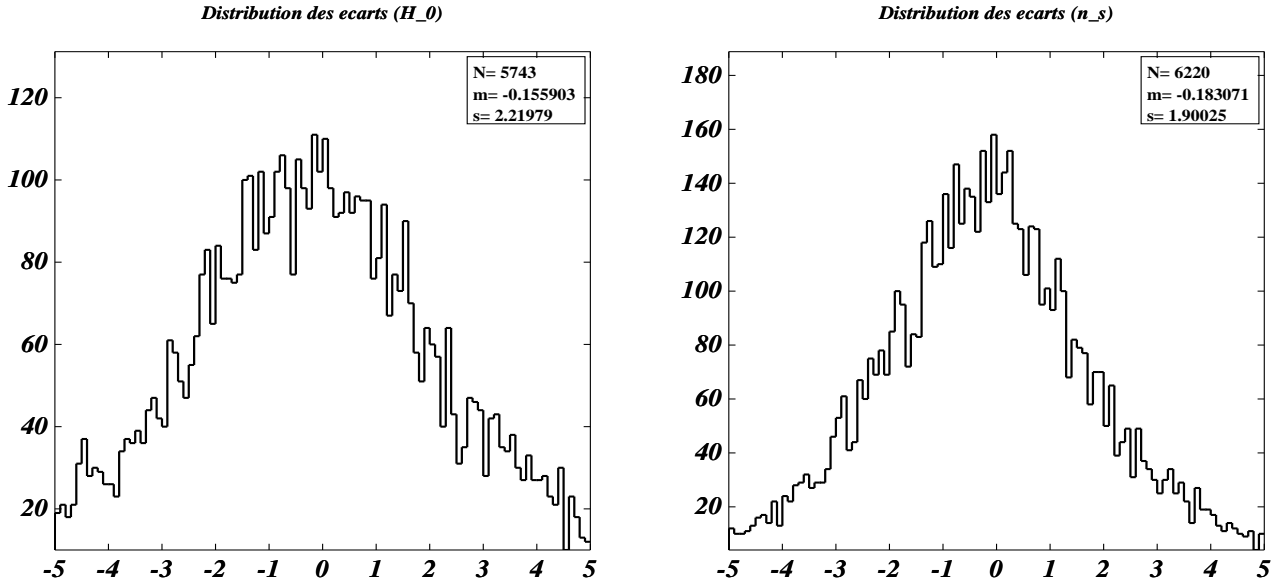


FIG. 5.28 – **Gauche** : Distribution de la quantité $\frac{H_0^{vrai} - H_0^{fit}}{\sigma_{H_0}}$, pour la constante de Hubble. **Droite** : Distribution de la quantité $\frac{n_s^{vrai} - n_s^{fit}}{\sigma_{n_s}}$, pour l'indice spectral scalaire. Erreurs de type Planck et modèle généré à partir des modèles de la base de données, par interpolation.

L'ajustement a convergé dans plus de 94 % (6359/6770) des cas. Par ailleurs, les moyennes des distributions sont compatibles avec 0 et les écarts-types obtenus sont relativement proches de 1 ($\sigma \simeq 2 - 2.3$). Ces distributions donnent une bonne idée de la fiabilité de l'ajustement pour ce type de données. Elles confirment les résultats obtenus dans la partie 5.2.2 et permettent d'envisager l'estimation des paramètres cosmologiques pour les missions à venir (Planck en particulier). Elles confirment aussi les résultats du chapitre 4 concernant la précision de notre interpolation.

Erreurs relatives sur les paramètres cosmologiques Pour résumer cette partie de l'analyse, nous avons tracé les histogrammes des erreurs normalisées par plusieurs grandeurs pertinentes :

- normalisation par le paramètre ajusté, ce qui permet d'obtenir l'erreur relative en % (figures 5.29),
 - normalisation par le pas de la grille (figures 5.30),
- ainsi que les histogrammes des erreurs absolues (figures 5.31).

Les erreurs relatives obtenues sont de l'ordre de ou inférieures au pourcent, ce qui confirme des résultats antérieurs obtenus pour la mission Planck (). On constate aussi que les résultats obtenus et présentés dans la partie précédente le sont dans des conditions où le pas de la grille (pour un paramètre donné) est en général supérieur à l'erreur elle-même (pas de la grille $\simeq 10 \times$ erreur), d'où l'importance de l'interpolation dans notre analyse.

Pour résumer cette partie de l'analyse :

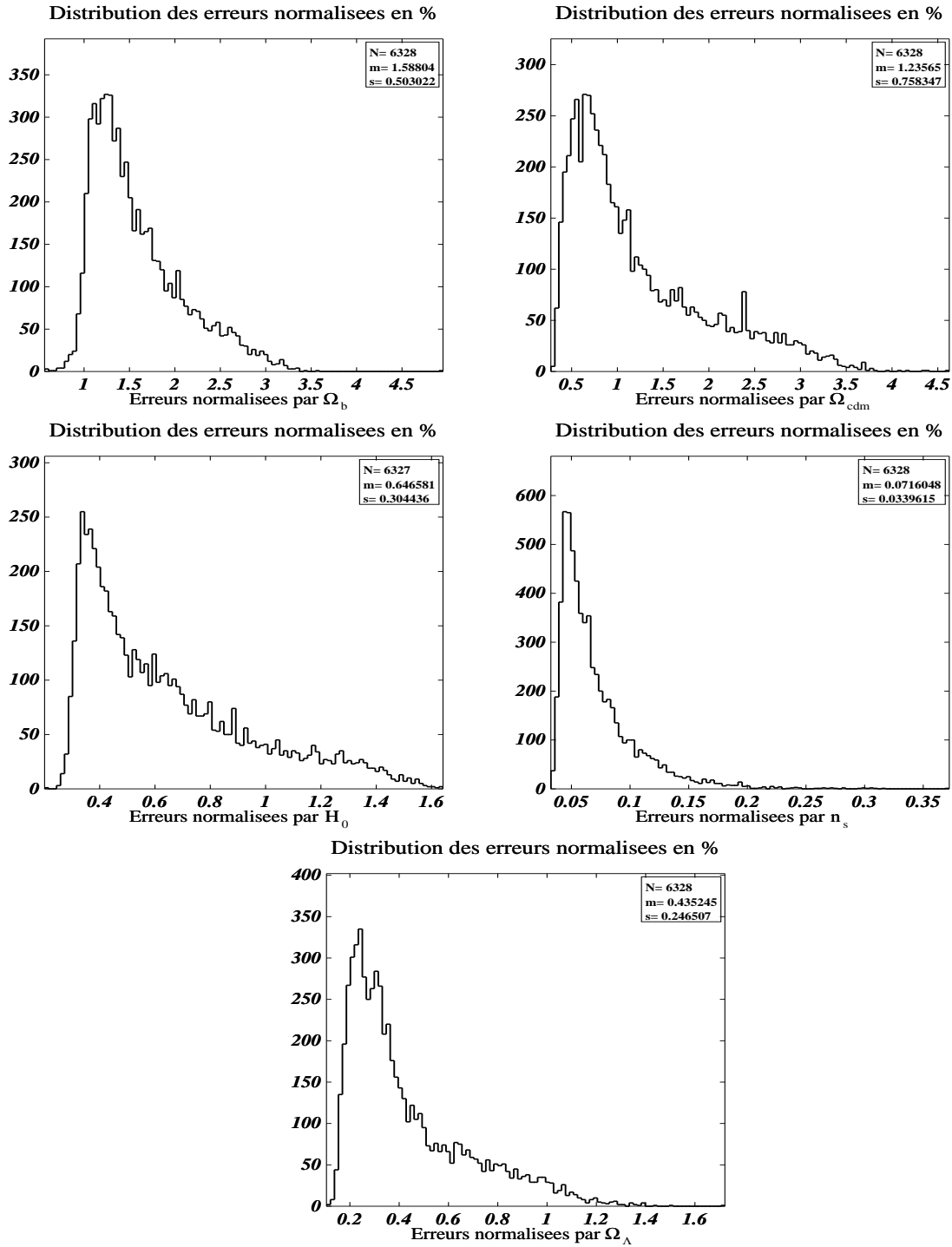


FIG. 5.29 – Erreurs de type Planck et modèle généré à partir des modèles de la base de données, par interpolation. **Gauche, haut :** Distribution de la quantité $(\sigma_{\Omega_b}/\Omega_b^{fit}) * 100$, pour la densité de baryons. **Droite, haut :** Distribution de la quantité $(\sigma_{\Omega_{cdm}}/\Omega_{cdm}^{fit}) * 100$, pour la densité de matière noire froide. **Gauche, milieu :** Distribution de la quantité $(\sigma_{H_0}/H_0^{fit}) * 100$, pour la constante de Hubble. **Droite, milieu :** Distribution de la quantité $(\sigma_{n_s}/n_s^{fit}) * 100$, pour la constante de Hubble. **Bas :** Distribution de la quantité $(\sigma_{\Omega_\Lambda}/\Omega_\Lambda^{fit}) * 100$, pour la densité d'énergie noire.

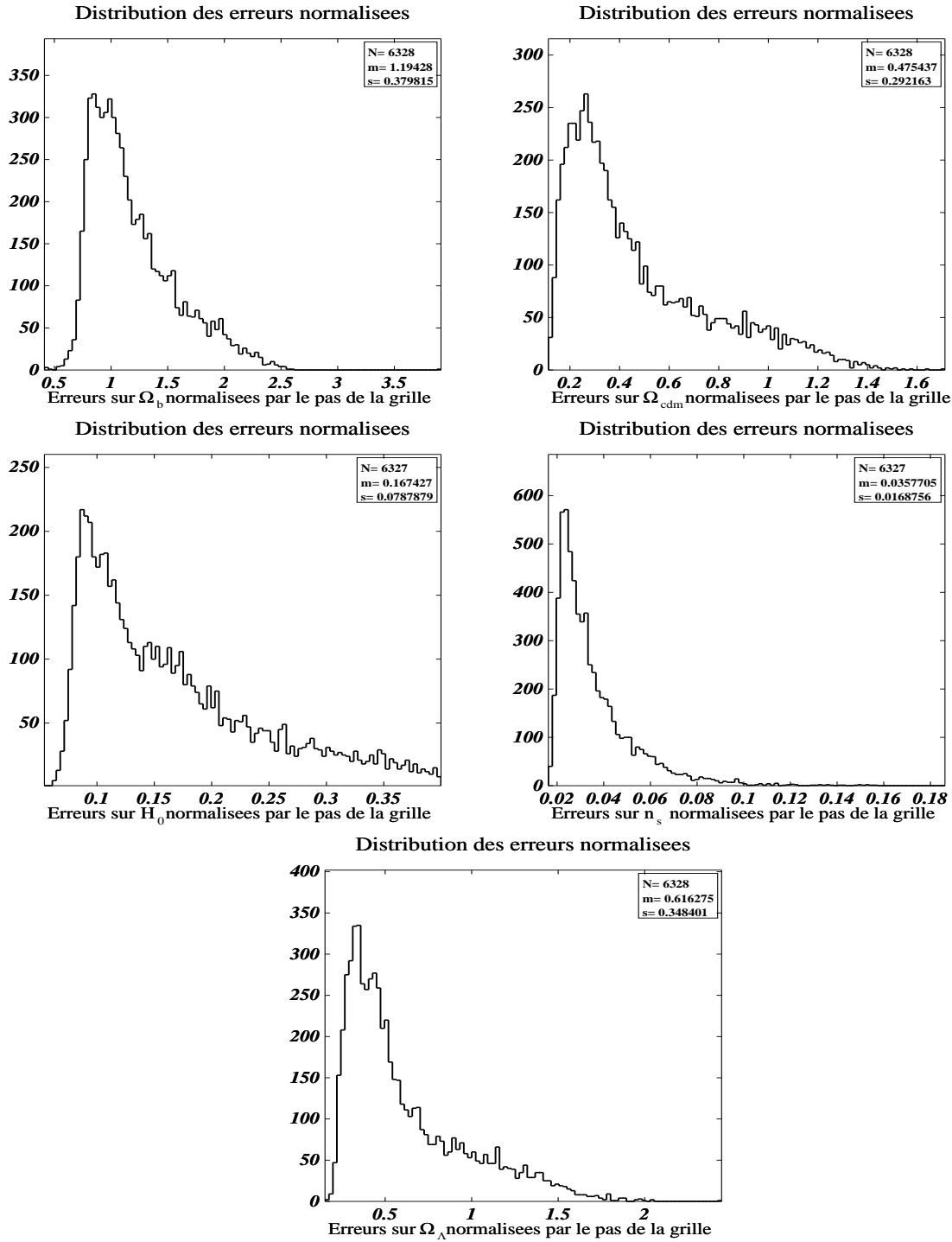


FIG. 5.30 – Erreurs de type Planck et modèle généré à partir des modèles de la base de données, par interpolation. **Gauche, haut :** Distribution de la quantité $\frac{\sigma_{\Omega_b}}{\text{pas grille}_{\Omega_b}}$, pour la densité de baryons. **Droite, haut :** Distribution de la quantité $\frac{\sigma_{\Omega_{cdm}}}{\text{pas grille}_{\Omega_{cdm}}}$, pour la densité de matière noire froide. **Gauche, milieu :** Distribution de la quantité $\frac{\sigma_{H_0}}{\text{pas grille}_{H_0}}$, pour la constante de Hubble. **Droite, milieu :** Distribution de la quantité $\frac{\sigma_{n_s}}{\text{pas grille}_{n_s}}$, pour la constante de Hubble. **Bas :** Distribution de la quantité $\frac{\sigma_{\Omega_\Lambda}}{\text{pas grille}_{\Omega_\Lambda}}$, pour la densité d'énergie noire.

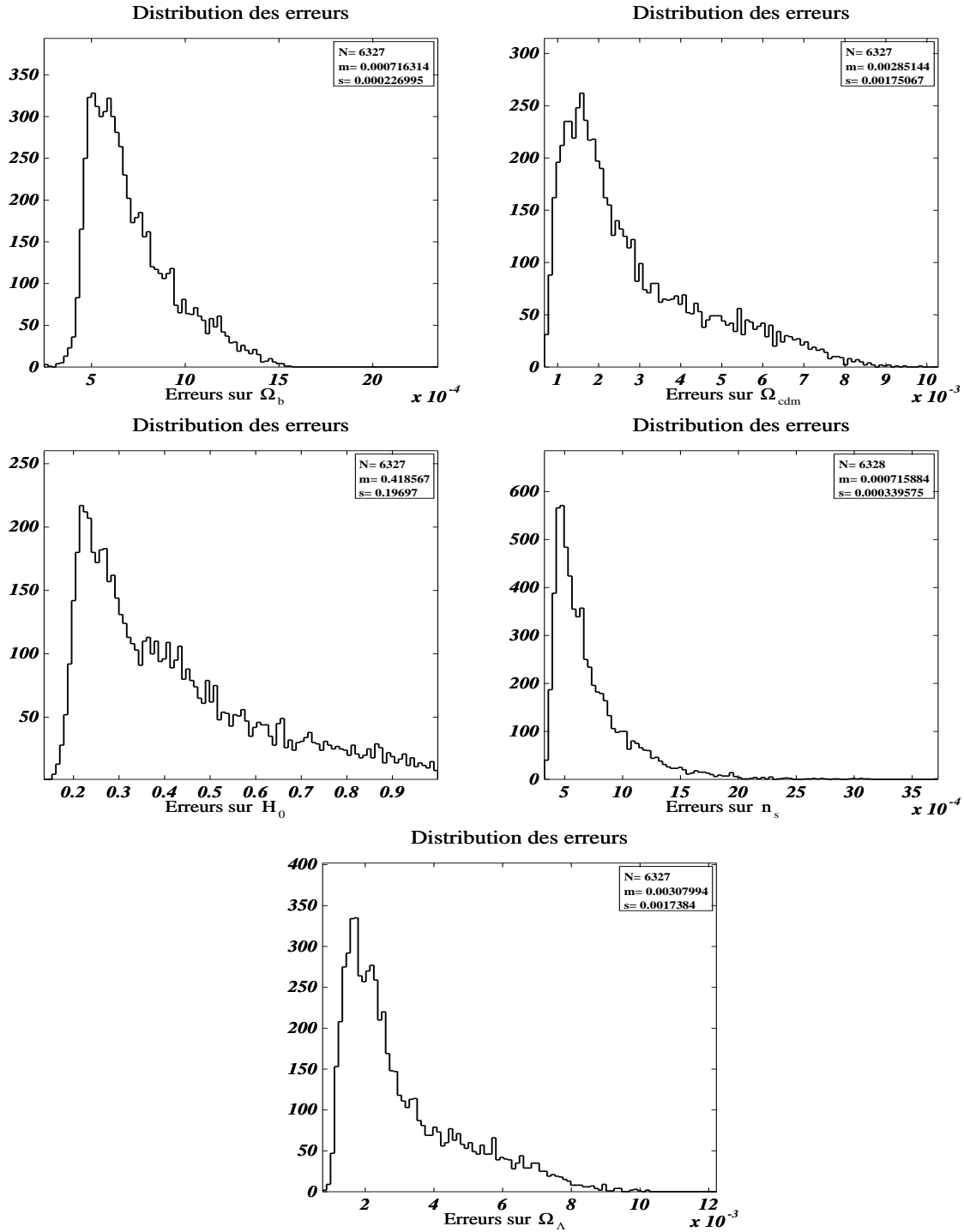


FIG. 5.31 – Erreurs de type Planck et modèle généré à partir des modèles de la base de données, par interpolation. **Gauche, haut :** Distribution de la quantité σ_{Ω_b} , pour la densité de baryons. **Droite :** Distribution de la quantité $\sigma_{\Omega_{cdm}}$ pour la densité de matière noire froide. **Gauche, milieu :** Distribution de la quantité σ_{H_0} pour la constante de Hubble. **Droite, milieu :** Distribution de la quantité σ_{n_s} pour la constante de Hubble. **Bas :** Distribution de la quantité σ_{Ω_Λ} pour la densité d'énergie noire.

- l’erreur obtenue sur les paramètres cosmologiques est de l’ordre de grandeur du pas de la grille en ce qui concerne les données avec une précision de type WMAP
- l’erreur obtenue sur les paramètres cosmologiques est plus petite que le pas de la grille en ce qui concerne les données avec une précision de type Planck
- Les erreurs obtenues issues de l’ajustement sont sous estimées d’un facteur 2 environ par rapport à aux incertitudes effectives (dans le cas d’erreurs de type Planck et de la base de données fine).

5.3.3 Courbure autour du minimum de χ^2 et estimation des erreurs

Comme je l’ai mentionné dans le chapitre 4 (4.4.1), le calcul des dérivées du χ^2 , qui permet *in fine* d’obtenir les erreurs de l’ajustement, se fait sur les points de la grille. Or on vient de voir que les erreurs obtenues par l’ajustement sont plus petite que le pas de la grille. Par ailleurs, on observe une sous estimation des erreurs d’un facteur 2.

Nous avons donc calculé, pour quelques uns des ajustements du Monte-Carlo, le χ^2 sur une ligne reliant les paramètres vrais aux paramètres obtenus par l’ajustement. Puis nous avons ajusté la forme du χ^2 par une parabole, d’une part en utilisant les points proches du minimum, d’autre part en utilisant les points correspondant à l’échelle du pas de la grille (qui est ici bien plus grande). L’allure du χ^2 et les deux paraboles sont présentés sur la figure 5.32. Elle montre que dans ce cas, la courbure est plus importante quand on s’éloigne du minimum du χ^2 . C’est en partie cet effet qui explique la sous estimation des erreurs par l’ajustement . Nous avons cependant montré au §5.3.3 que cet effet pouvait quasiment disparaître lorsque l’on augmentait la précision de la base de données.

Analyse complémentaire

Les résultats présentés au §5.2 ont été obtenus avec une base de données de modèles cosmologiques à la précision limitée, avant le calcul des modèles de la base de données précise (voir chapitre 5 5.1 et 5.2) pour les précisions des grilles utilisées). Nous avons donc, une fois la base de données précise calculée, refait une partie de l’analyse WMAP. Les résultats de cette nouvelle analyse sont présentés sur les figures 5.33 et 5.34 et confirment les résultats résumés dans la conclusion partielle (essentiellement l’absence de biais). Par ailleurs, le facteur 2 entre les erreurs données par l’ajustement, et les écarts entre les paramètres ajustés et les paramètres vrais, a été réduit et est maintenant quasiment égal à un. Ceci signifie que lors de l’estimation des paramètres cosmologiques avec la base de données fine et pour les données actuelles, les erreurs données par l’ajustement sont correctes.

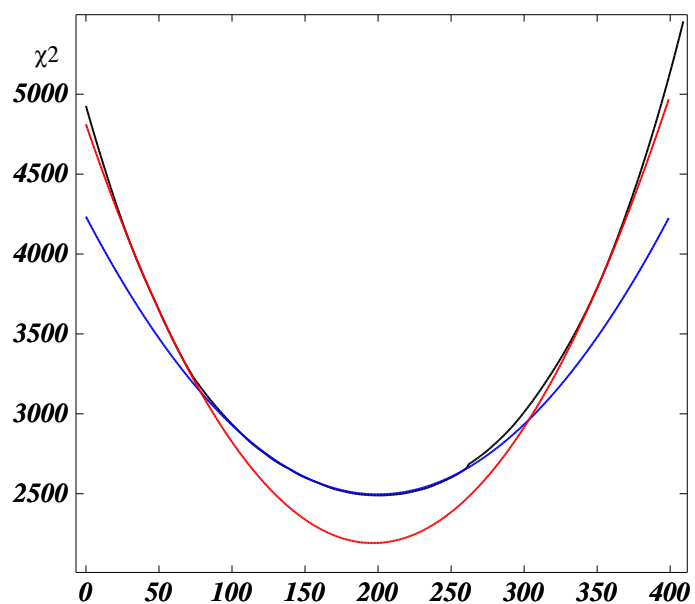


FIG. 5.32 – *Parcours de l'espace des paramètres selon la droite reliant les paramètres vrais aux paramètres ajustés. La courbe noire représente le χ^2 calculé, la courbe bleue la parabole obtenue par ajustement des points proches du minimum ($\Delta\chi^2 < 5$), et la courbe rouge la parabole obtenue par ajustement des points à l'échelle des cellules de la base de données (ce qui correspond à $1000 < \Delta\chi^2 < 1200$). L'échelle des abscisses est une échelle linéaire.*

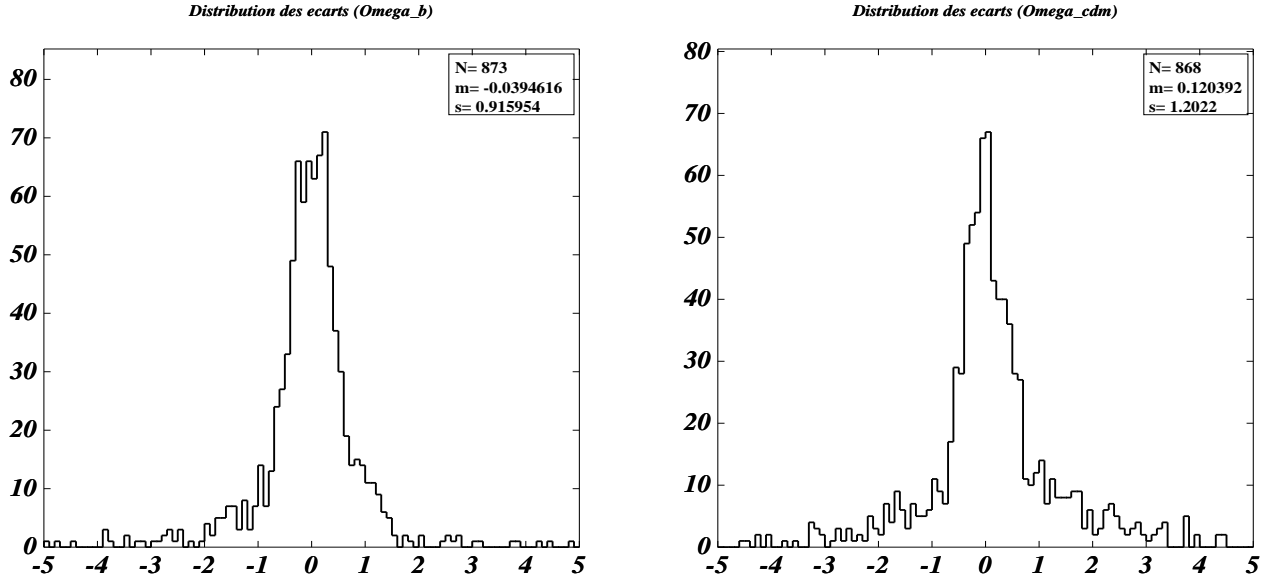


FIG. 5.33 – *Distribution des écarts pour des données générées à partir d'un modèle interpolé et des erreurs de type "WMAP". Base de données fine.*

Gauche : *Distribution de la quantité $\frac{\Omega_b^{vrai} - \Omega_b^{fit}}{\sigma_{\Omega_b}}$, pour la densité de matière baryonique.* **Droite :** *Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{cdm}^{vrai} - \Omega_{cdm}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{cdm}}}$, pour la densité de matière noire froide.*

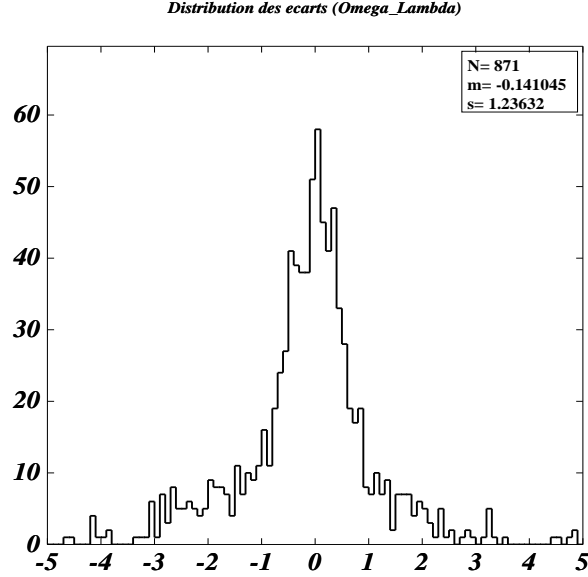


FIG. 5.34 – *Distribution des écarts pour des données générées à partir d'un modèle interpolé et des erreurs de type "WMAP". Base de données fine.*

Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{\Lambda}^{vrai} - \Omega_{\Lambda}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{\Lambda}}}$, pour la densité d'énergie noire sous forme de constante cosmologique.

5.3.4 Corrélations entre paramètres ajustés

On s'intéresse aussi aux corrélations à deux dimensions, à travers la quantité

$$\frac{\Omega_i^{vrai} - \Omega_i^{fit}}{\sigma_i} \text{ vs } \frac{\Omega_j^{vrai} - \Omega_j^{fit}}{\sigma_j}, \quad i \neq j$$

dont la distribution nous informe sur les corrélations à deux dimensions existant lors de la détermination des paramètres cosmologiques, pour des mesures dont la précision est typique de "Planck", à partir du spectre du fond diffus.

Les figures 5.35 à 5.37 présentent les résultats sous la forme d'histogrammes à 2 dimensions. Des courbes de niveaux sont superposées à ces histogrammes pour mettre en relief les corrélations entre les paramètres cosmologiques.

Par ailleurs, nous avons aussi diagonalisé la matrice de Fisher de chaque ajustement pour obtenir les directions de dégénérescence dans l'espace des paramètres. Pour représenter ces directions, nous avons tracé les ellipses des erreurs dans des plans à deux dimensions, pour quelques uns des ajustements. Ceci nous permet de voir que le résultat de chaque ajustement est en accord avec les résultats statistiques sur les corrélations. On peut donc considérer que l'indication sur les directions de dégénérescence fournie par la matrice de Fisher est fiable. Nous utiliserons d'ailleurs cette analyse pour étudier les résultats des ajustements sur les données disponibles actuellement dans la partie suivante (§5.4).

Calcul de la corrélation et comparaison Nous avons aussi calculé les distributions du terme de corrélation :

$$\mathcal{C}_{ij} = \frac{\Omega_i^{vrai} - \Omega_i^{fit}}{\sigma_{\Omega_i}} \cdot \frac{\Omega_j^{vrai} - \Omega_j^{fit}}{\sigma_{\Omega_j}}.$$

Nous avons comparé les distributions obtenues à celles de deux variables gaussiennes corrélées, pour différentes valeurs du coefficient de corrélation ρ (figure 5.38)

$$D(x, y) \propto \exp \left[\frac{-1}{(2(1 - \rho^2))} (x^2 + y^2 - 2\rho xy) \right].$$

La figure 5.39 représente les distributions de \mathcal{C}_{ij} pour les deux paires $(\Omega_{cdm}, \Omega_\Lambda)$ et (H_0, n_s) , obtenues à partir de l'ensemble des ajustements. Le terme de corrélation ρ déduit des matrices de Fisher est proche de -1 (anti-corrélation totale) pour la paire $(\Omega_{cdm}, \Omega_\Lambda)$ et $\rho_{H_0, n_s} \simeq 0.85$.

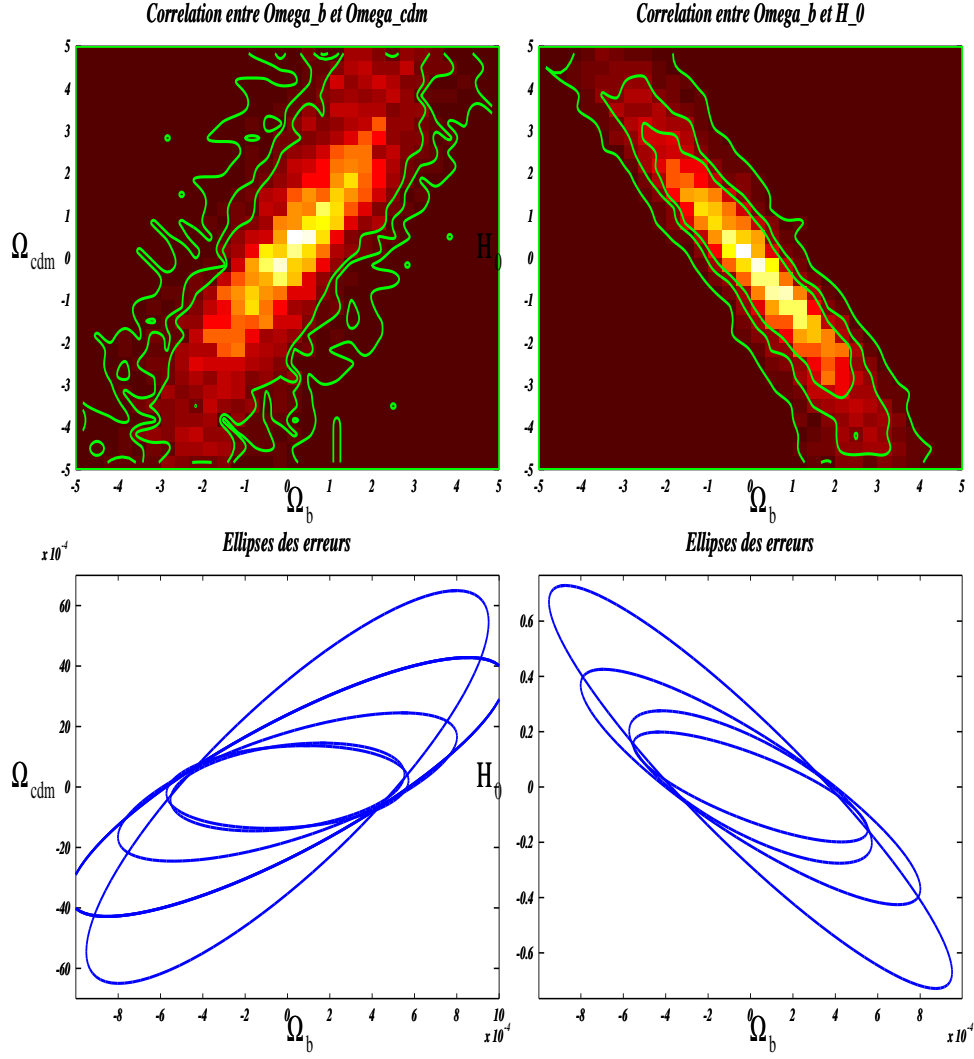


FIG. 5.35 – **Gauche** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_b^{vrai} - \Omega_b^{fit}}{\sigma_{\Omega_b}}$ vs $\frac{H_0^{vrai} - H_0^{fit}}{\sigma_{H_0}}$.
Droite : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_b^{vrai} - \Omega_b^{fit}}{\Omega_b}$ vs $\frac{\Omega_{cdm}^{vrai} - \Omega_{cdm}^{fit}}{\sigma_{\Omega_{cdm}}}$. Erreurs Planck et données générées à partir d'un modèle interpolé.

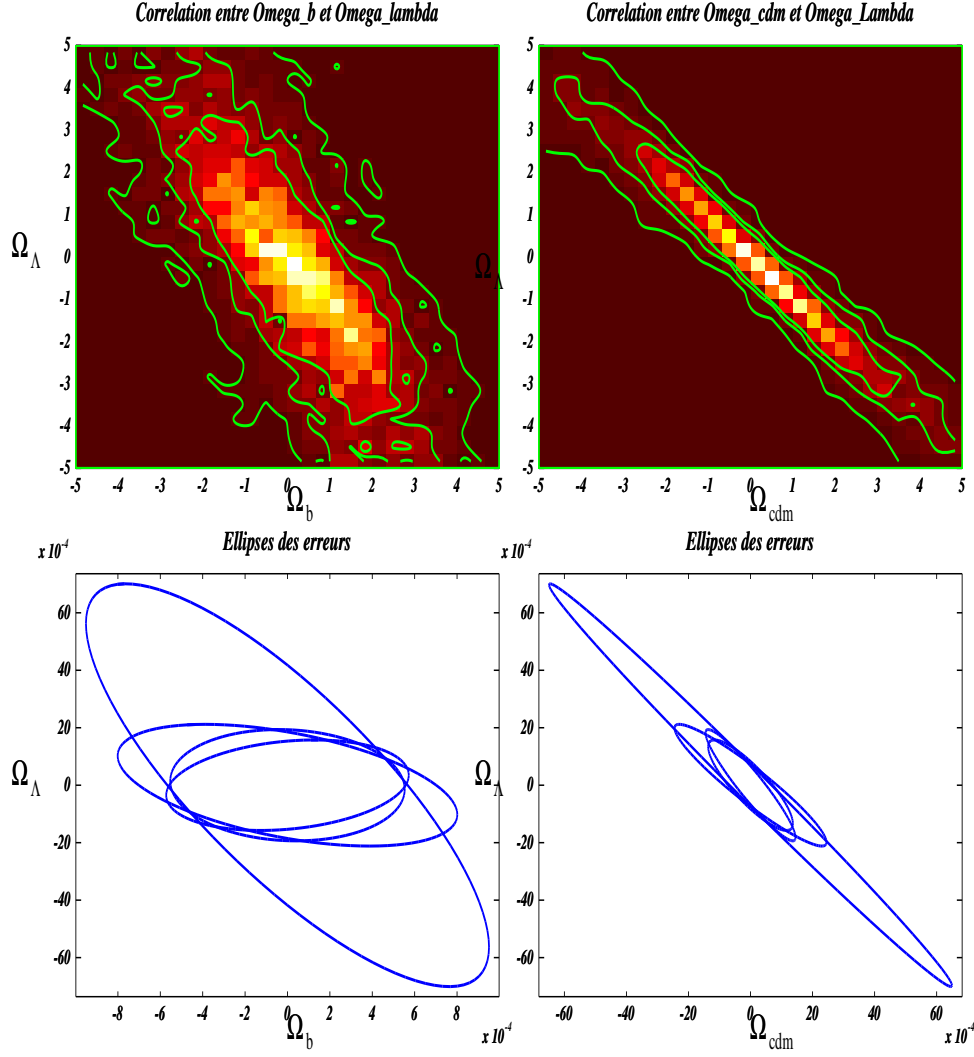


FIG. 5.36 – **Gauche** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_b^{\text{vrai}} - \Omega_b^{\text{fit}}}{\sigma_{\Omega_b}}$ vs $\frac{\Omega_\Lambda^{\text{vrai}} - \Omega_\Lambda^{\text{fit}}}{\sigma_{\Omega_\Lambda}}$.
Droite : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{\text{cdm}}^{\text{vrai}} - \Omega_{\text{cdm}}^{\text{fit}}}{\sigma_{\Omega_{\text{cdm}}}}$ vs $\frac{\Omega_\Lambda^{\text{vrai}} - \Omega_\Lambda^{\text{fit}}}{\sigma_{\Omega_\Lambda}}$. Erreurs Planck et données générées à partir d'un modèle interpolé.

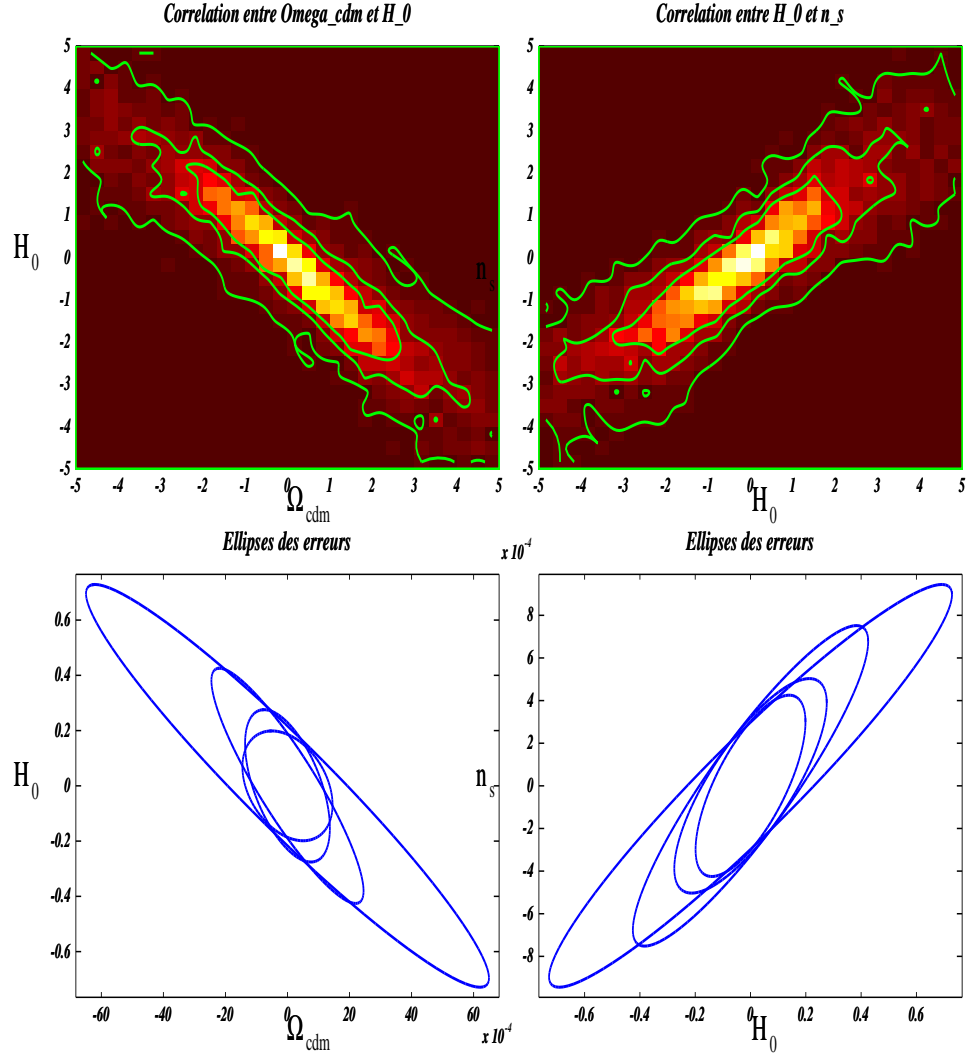


FIG. 5.37 – **Gauche** : Distribution de la quantité $\frac{\Omega_{\text{cdm}}^{\text{vrai}} - \Omega_{\text{cdm}}^{\text{fit}}}{\sigma_{\Omega_{\text{cdm}}}} \text{ vs } \frac{H_0^{\text{vrai}} - H_0^{\text{fit}}}{\sigma_{H_0}}$.
Droite : Distribution de la quantité $\frac{H_0^{\text{vrai}} - H_0^{\text{fit}}}{\sigma_{H_0}} \text{ vs } \frac{n_s^{\text{vrai}} - n_s^{\text{fit}}}{\sigma_{n_s}}$. Erreurs Planck et données générées à partir d'un modèle interpolé.

Distribution de la corrélation entre 2 variables gaussiennes

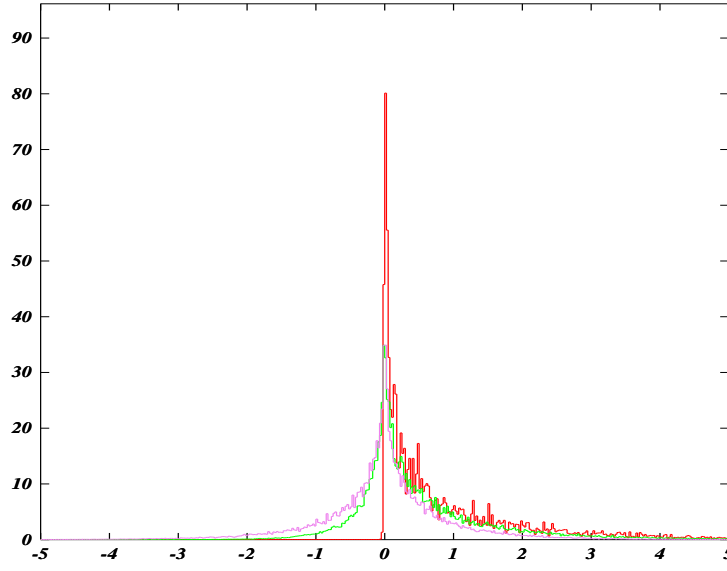
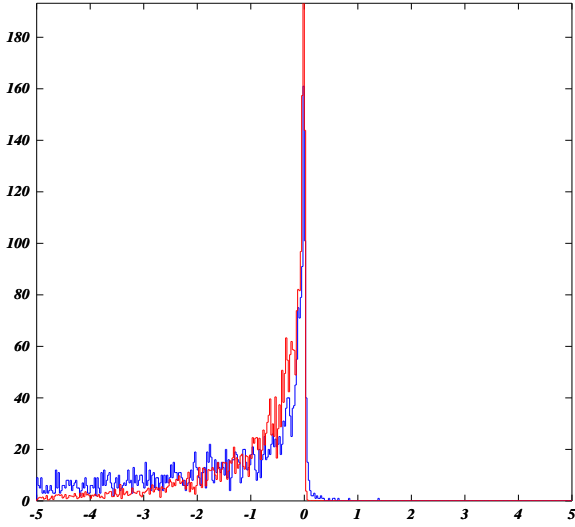


FIG. 5.38 – *Distribution de C_{ij} pour différentes valeurs du coefficient de corrélation ρ pour deux variables aléatoires gaussiennes. En rouge, $\rho = 1$, en violet $\rho = 0$ et en vert $\rho = 0.5$.*

Distribution de la corrélation entre Ω_{cdm} et Ω_{Lambda}



Distribution de la corrélation entre H_0 et n_s

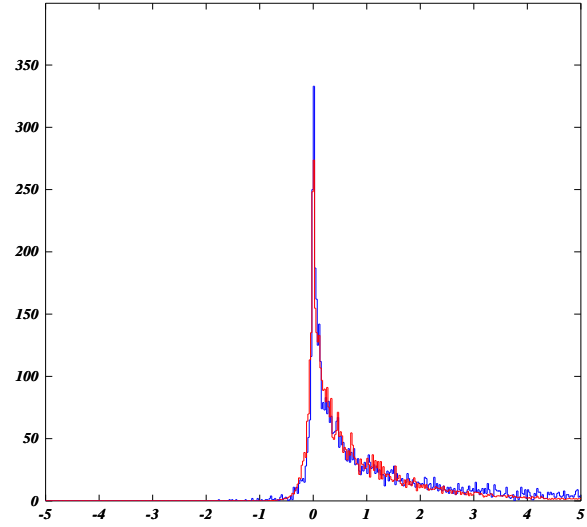


FIG. 5.39 – **Gauche** : *Distribution de C_{ij} pour la paire de paramètres $(\Omega_{\text{cdm}}, \Omega_{\Lambda})$ en bleu. En rouge, la distribution attendue pour $\rho = -1$.* **Droite** : *Distribution de C_{ij} pour la paire de paramètres (H_0, n_s) en bleu. En rouge, la distribution attendue pour $\rho = 0.85$.*

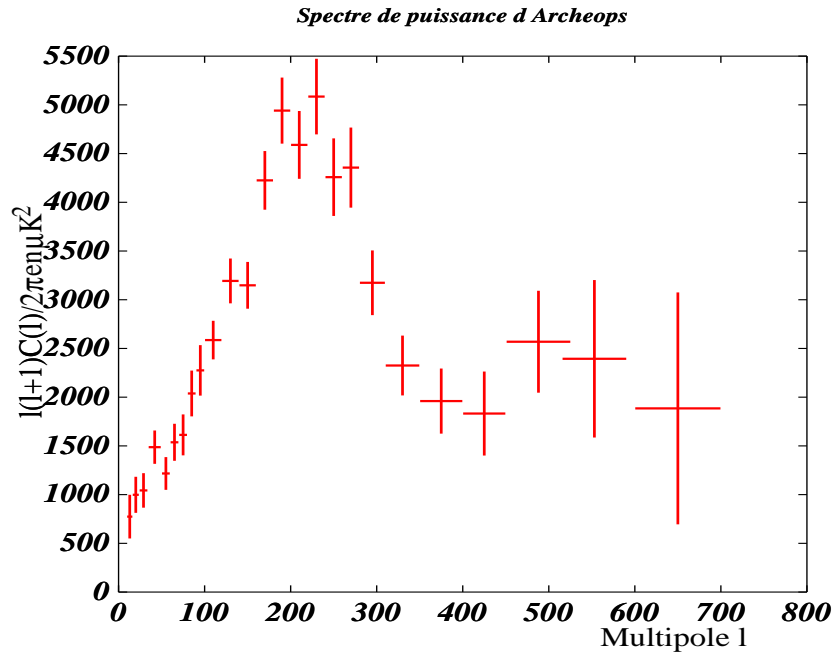


FIG. 5.40 – Spectre de C_ℓ publié par l'expérience Archeops.

5.4 Ajustements des données actuelles

Suivant l'analyse développée précédemment, nous allons appliquer notre méthode d'ajustement aux données actuelles. Parmi les différentes expériences, nous en avons sélectionné trois qui sont représentatives de la précision actuelle des mesures des anisotropies de température. Ces trois expériences sont Archeops ((Benoît et al. 2003) et (Tristram et al. 2005)), CBI (Pearson et al. 2003), et WMAP (Bennett et al. 2003). Elles sont décrites succinctement dans le chapitre 3, en ce qui concerne les caractéristiques techniques et les résultats scientifiques. Les figures 5.40, 5.41 et 5.42 montrent les spectres de C_ℓ publiés par ces expériences et utilisés dans l'analyse présentée ici. Le spectre de CBI est tronqué à $\ell = 1500$ car la contamination éventuelle des mesures à plus petite échelle angulaire par l'effet Sunyaev-Zel'dovich n'est pas encore claire.

5.4.1 Archeops seul

Dans un premier temps, nous tentons d'ajuster le spectre de puissance obtenu par Archeops (figure 5.40). Pour cet ajustement, nous avons décidé de fixer H_0 et de faire plusieurs ajustements, pour trois valeurs différentes de H_0 (65, 70, et 75 $km/s/Mpc$), compte tenu de la difficulté à estimer ce paramètre avec les données Archeops uniquement. Les résultats de l'ajustement sont présentés sur la figure 5.43 et dans la table suivante.

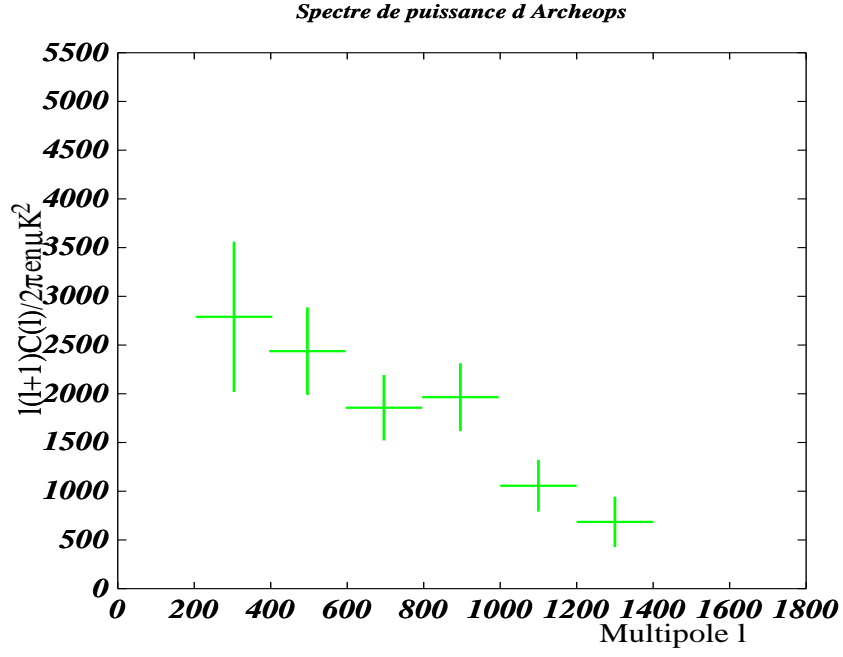


FIG. 5.41 – *Spectre de C_ℓ publié par l'expérience CBI.*

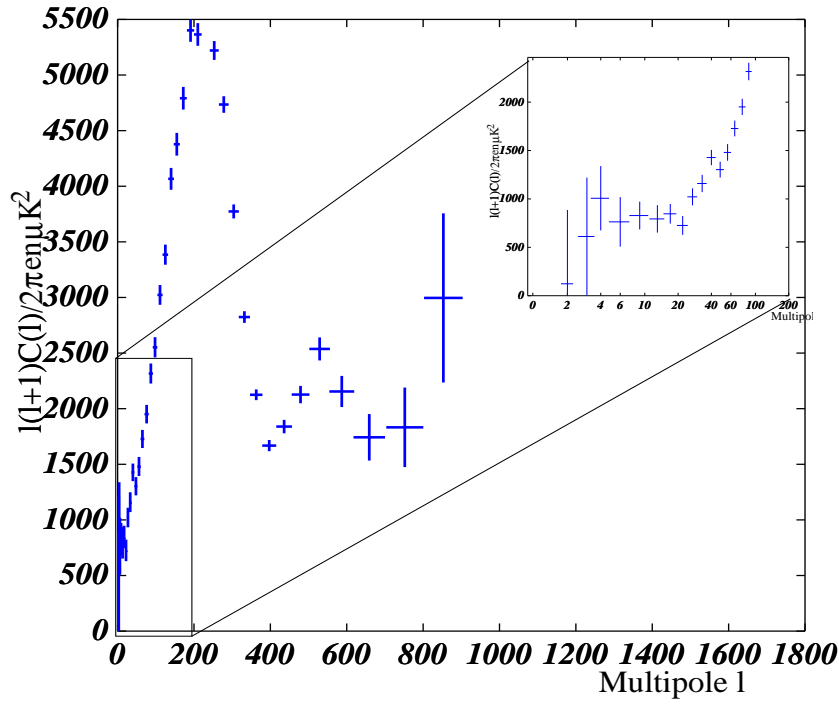


FIG. 5.42 – *Spectre de C_ℓ publié par l'expérience WMAP.*

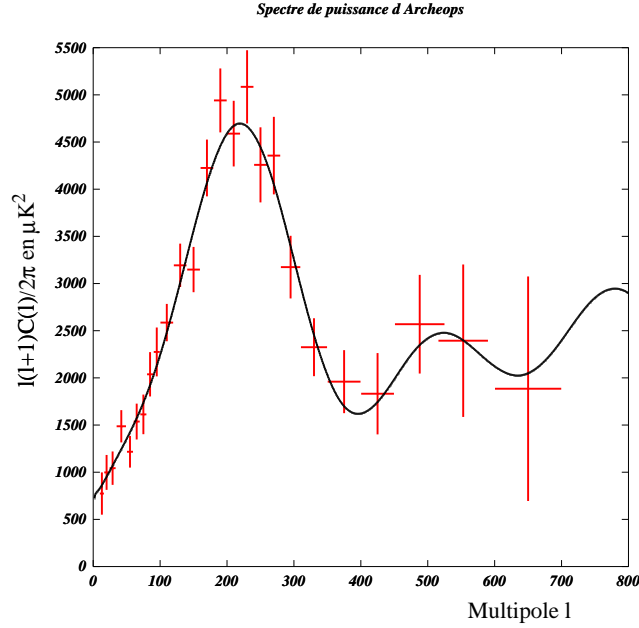


FIG. 5.43 – Ajustement du spectre de C_ℓ publié par l'expérience Archeops. Les données sont en rouge, le modèle ajusté en noir. La valeur de H_0 est fixée ici à 70 km/s/Mpc .

Paramètres	Ω_b	Ω_{cdm}	Ω_Λ	H_0	n_s	χ^2	χ^2/ddl
Valeurs	0.035	0.50	0.39	75	1.03	14.1	0.7
Erreurs	0.005	0.16	0.21	fixe	0.03		
Valeurs	0.042	0.49	0.44	65	0.99	14.2	0.7
Erreurs	0.009	0.18	0.22	fixe	0.05		
Valeurs	0.039	0.52	0.38	70	1.01	13.9	0.7
Erreurs	0.006	0.19	0.23	fixe	0.04		

On obtient aussi la matrice de covariance 5.1. Cette matrice est la matrice de covariance normalisée, c'est à dire qu'il faut multiplier les éléments (i, j) de la matrice par $\sigma_i \sigma_j$ pour obtenir la matrice de covariance. Les paramètres sont dans l'ordre, Ω_b , Ω_{cdm} , Ω_Λ , H_0 et n_s .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.667941 & -0.683703 & 0 & 0.412643 \\ 0.667941 & 1 & -0.995212 & 0 & 0.942361 \\ -0.683703 & -0.995212 & 1 & 0 & -0.930081 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.412643 & 0.942361 & -0.930081 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

$$\sigma_i = (0.009 \quad 0.18 \quad 0.22 \quad fixe \quad 0.05)$$

La matrice donnée ici correspond au cas $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$. On peut diagonaliser cette matrice pour mettre en évidence les axes principaux de dégénérescence, comme cela a été fait dans la partie 5.3.2.

On constate que les valeurs des paramètres obtenues sont compatibles avec celles publiées par WMAP, et une valeur de χ^2 un peu faible ($\chi^2/ddl \simeq$

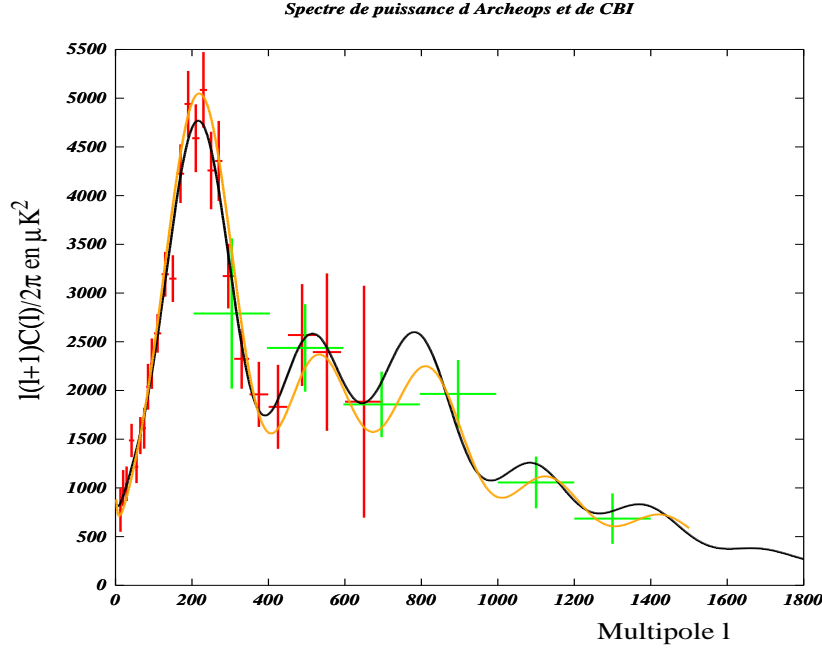


FIG. 5.44 – Ajustement du spectre de C_ℓ publié par les expériences Archeops et CBI. Les données Archeops sont en rouge, les données CBI en vert et le modèle ajusté en noir. on a aussi représenté le modèle obtenu par la première analyse des données Archeops et CBI par la collaboration Archeops (orange).

0.7). Cet effet est probablement du à l'existence de corrélations entre les différents points de mesure, non prise en compte dans cet ajustement.

5.4.2 Archeops et CBI

Il manque à l'expérience Archeops une couverture des petites échelles angulaires ($\ell \in [700 \rightarrow 1500]$). Nous combinons donc dans cette partie les spectres de puissance Archeops et CBI (figures 5.40 et 5.41) afin de profiter de la couverture d'une grande partie du ciel offerte par Archeops, et de la sensibilité aux petites échelles angulaires de CBI. Le résultat de l'ajustement est présenté sur la figure 5.44 et dans la table suivante. On y a représenté en orange le résultat de l'analyse du spectre de puissance par la collaboration Archeops (Benoît et al. 2003).

Paramètres	Ω_b	Ω_{cdm}	Ω_Λ	H_0	n_s	χ^2	χ^2/dof
Valeurs	0.045	0.43	0.51	62	0.95	16	0.7
Erreurs	0.013	0.12	0.14	9	0.03		
Erreurs relatives (%)	29	28	27	15	3		

Ici, les erreurs ont été réduites comparées à l'ajustement du spectre Archeops seul. Elles sont du même ordre de grandeur que les erreurs pour les données Archeops avec un à-priori sur H_0 , sauf pour le paramètre Ω_b qui

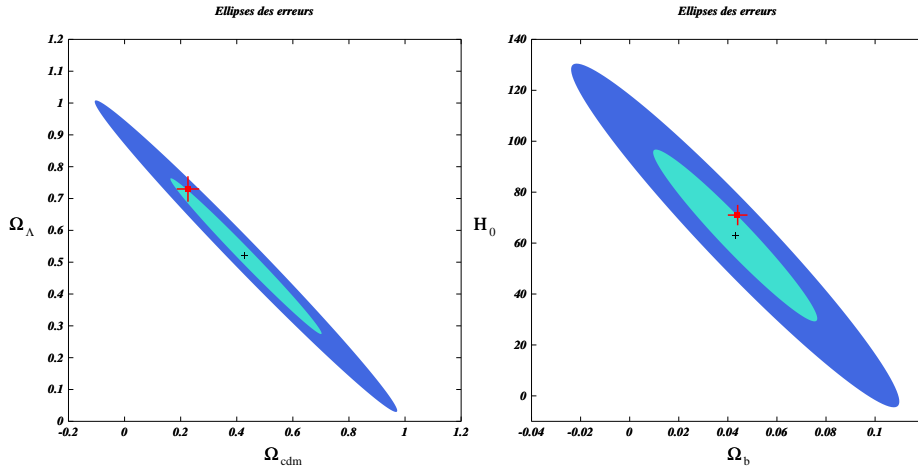


FIG. 5.45 – **Gauche** : *Ellipse des erreurs dans le plan $(\Omega_{cdm}, \Omega_{\Lambda})$* . **Droite** : *Ellipse des erreurs dans le plan (Ω_b, H_0)* . Les points indiqués en rouge correspondent aux paramètres obtenus lors de l'analyse des données Archéops par la collaboration Archéops

souffre de l'indétermination de H_0 . La plupart des paramètres souffrent cependant d'une grande incertitude, comme Ω_{cdm} sur lequel l'incertitude est de l'ordre de 25%. On peut cependant analyser les corrélations existant entre les différents paramètres. Nous avons calculé dans les 2 plans $(\Omega_{cdm}, \Omega_{\Lambda})$ et (Ω_b, H_0) les ellipses des erreurs. Elles sont représentées sur la figure 5.45, pour les contours à 1 et 2 sigma. Les points indiqués en rouge correspondent aux paramètres obtenus lors de l'analyse des données Archéops par la collaboration Archéops (Benoît et al. 2003).

5.4.3 WMAP

Ajustement des paramètres cosmologiques par la collaboration WMAP L'expérience WMAP couvre une gamme de ℓ suffisamment étendue pour ajuster les paramètres cosmologiques sur le seul spectre de C_ℓ (figure 5.42).

La figure 5.46 représente les données WMAP et deux spectres de puissance :

- le spectre de puissance représenté en orange est le spectre de puissance obtenu par la collaboration WMAP à partir des seules mesures du fond diffus de WMAP. L'estimation des paramètres cosmologiques est faite par une méthode de chaîne de Markov (Verde et al. 2003). Les paramètres utilisés sont les même que dans notre analyse, excepté Ω_{Λ} qui est supprimé, et τ , la profondeur optique de réionisation qui est rajoutée. Le modèle cosmologique utilisé (appelé Λ -CDM) est un modèle d'univers plat $\Omega_{tot} = 1$ avec constante cosmologique et un spectre initial des fluctuations de type loi de puissance ($\propto k^n$) (Spergel et al. 2003). L'estimation des paramètres cosmologiques avec les seules données WMAP donne les résultats suivants :

Paramètres	Ω_b	Ω_{cdm}	τ	H_0	n_s
Valeurs	0.047	0.243	0.166	72	0.99
Erreurs	0.006	0.07	0.07	5	0.04

Dans la suite de notre analyse, nous comparerons nos résultats à cette estimation des paramètres cosmologiques.

- le spectre de puissance représenté en rouge est le spectre de puissance calculé à partir des paramètres cosmologiques suivants :

Paramètres	Ω_b	Ω_{cdm}	Ω_Λ	H_0	n_s
Valeurs	0.044	0.226	0.73	71	0.93
Erreurs	0.004	0.04	0.04	4	0.03

Ces paramètres sont ceux estimés par la collaboration WMAP à partir des données CMB des expériences WMAP, CBI, ACBAR (Kuo et al. 2002) , des données du 2dF Galaxy Redshift Survey (Colless et al.(2001)) et des données sur les forêts Lyman- α .

Ajustement des données WMAP par notre méthode Le résultat de notre ajustement est présenté sur la figure 5.47 et dans la table suivante. Sur la figure 5.47, on a aussi représenté le modèle obtenu par la collaboration WMAP à partir des mesures de C_ℓ de WMAP uniquement (Spergel et al. 2003).

Paramètres	Ω_b	Ω_{cdm}	Ω_Λ	H_0	n_s	χ^2	χ^2/dof
Valeurs	0.045	0.20	0.76	70	0.93	43	1.1
Erreurs	0.007	0.02	0.02	6.7	0.02		
Erreurs relatives (%)	18	12	3	11	2		

Dans le cas des données de WMAP, les erreurs sur les paramètres cosmologiques sont suffisamment faibles pour étudier les corrélations à partir de la matrice de covariance. Nous avons calculé les contours à un et deux sigmas dans les plans en projection, correspondant aux 10 combinaisons ($5 * 4/2$) de paires de paramètres cosmologiques. Ces contours sont représentés sur la figure 5.48.

Les directions de ces axes principaux sont en bon accord avec les distributions des corrélations de la section 5.2.2.

Pour une des paires de paramètres ($\Omega_{cdm}, \Omega_\Lambda$), nous avons aussi parcouru le plan en fixant les autres paramètres à leurs valeurs ajustées (table 5.4.3). La figure 5.49 représente le χ^2 en fonction de Ω_{cdm} et de Ω_Λ avec les contours à 68 et 95 % de confiance.

5.4.4 Archeops, WMAP et CBI

Enfin nous regroupons les trois expériences pour estimer les paramètres cosmologiques. Cependant, les différences dans la normalisation des différentes expériences ne sont pas encore prises en compte dans notre analyse, et cela conduit à des résultats moins robustes. Le résultat de l'ajustement est présenté sur la figure 5.50 et dans la table suivante.

Paramètres	Ω_b	Ω_{cdm}	Ω_Λ	H_0	n_s	χ^2	χ^2/dof
Valeurs	0.043	0.25	0.69	74	0.96	139	$\simeq 2$
Erreurs	0.013	0.06	0.06	12	0.02		

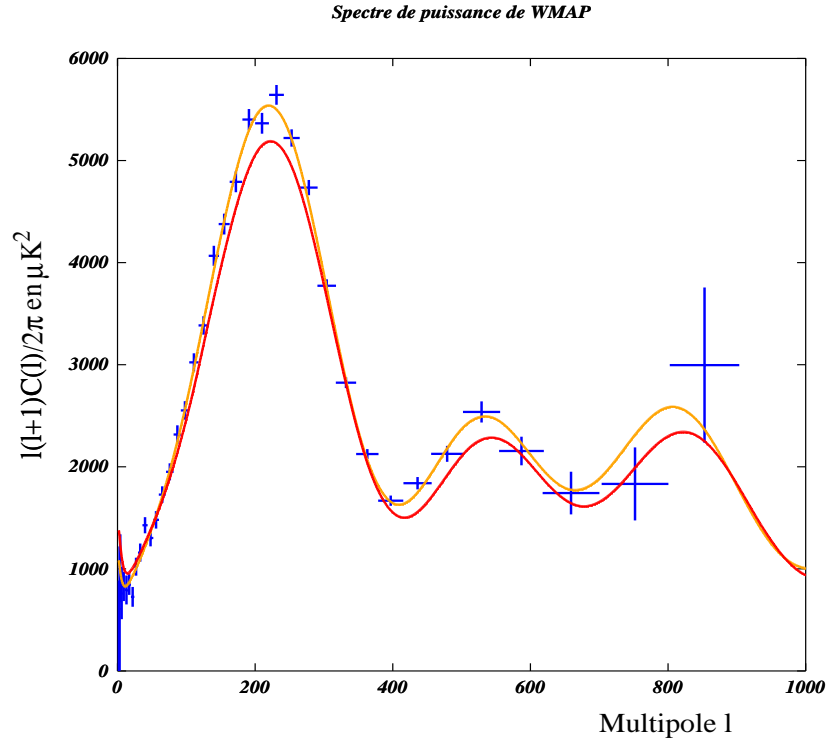


FIG. 5.46 – Ajustement du spectre de C_l publié par l'expérience WMAP. Les données sont en bleu. En orange, le modèle ajusté présenté dans l'article de la collaboration WMAP tiré des analyses du seul spectre de puissance de WMAP. En rouge, le modèle calculé à partir des paramètres estimés à partir des données CMB des expériences WMAP, CBI, ACBAR, des données du 2dF Galaxy Redshift Survey et des données sur les forêts Lyman- α .

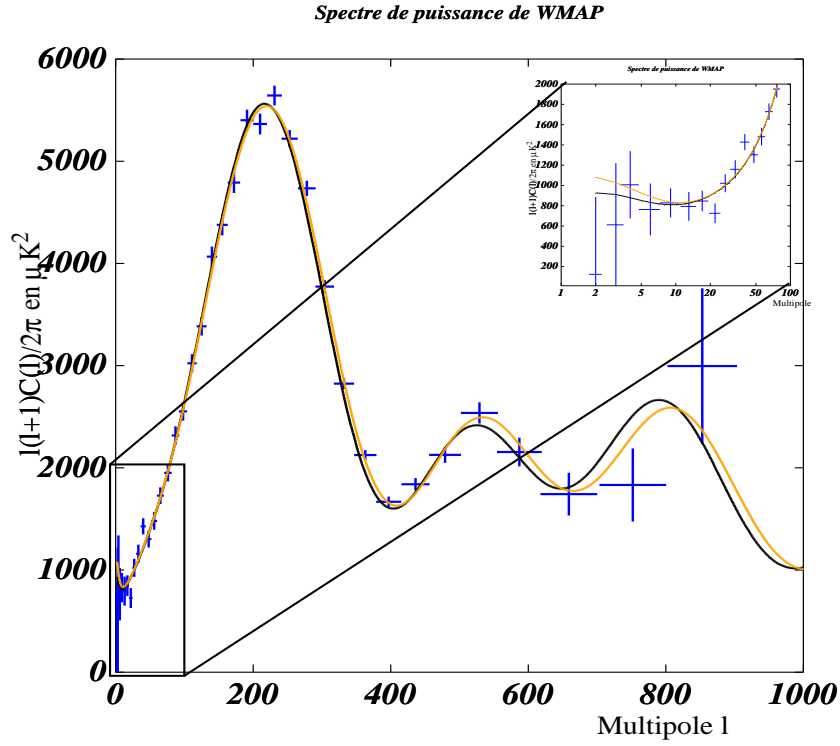


FIG. 5.47 – Ajustement du spectre de C_ℓ publié par l'expérience WMAP. Les données sont en bleu, le modèle ajusté en noir. En orange, le modèle ajusté présenté dans l'article de la collaboration WMAP, à partir des données WMAP uniquement.

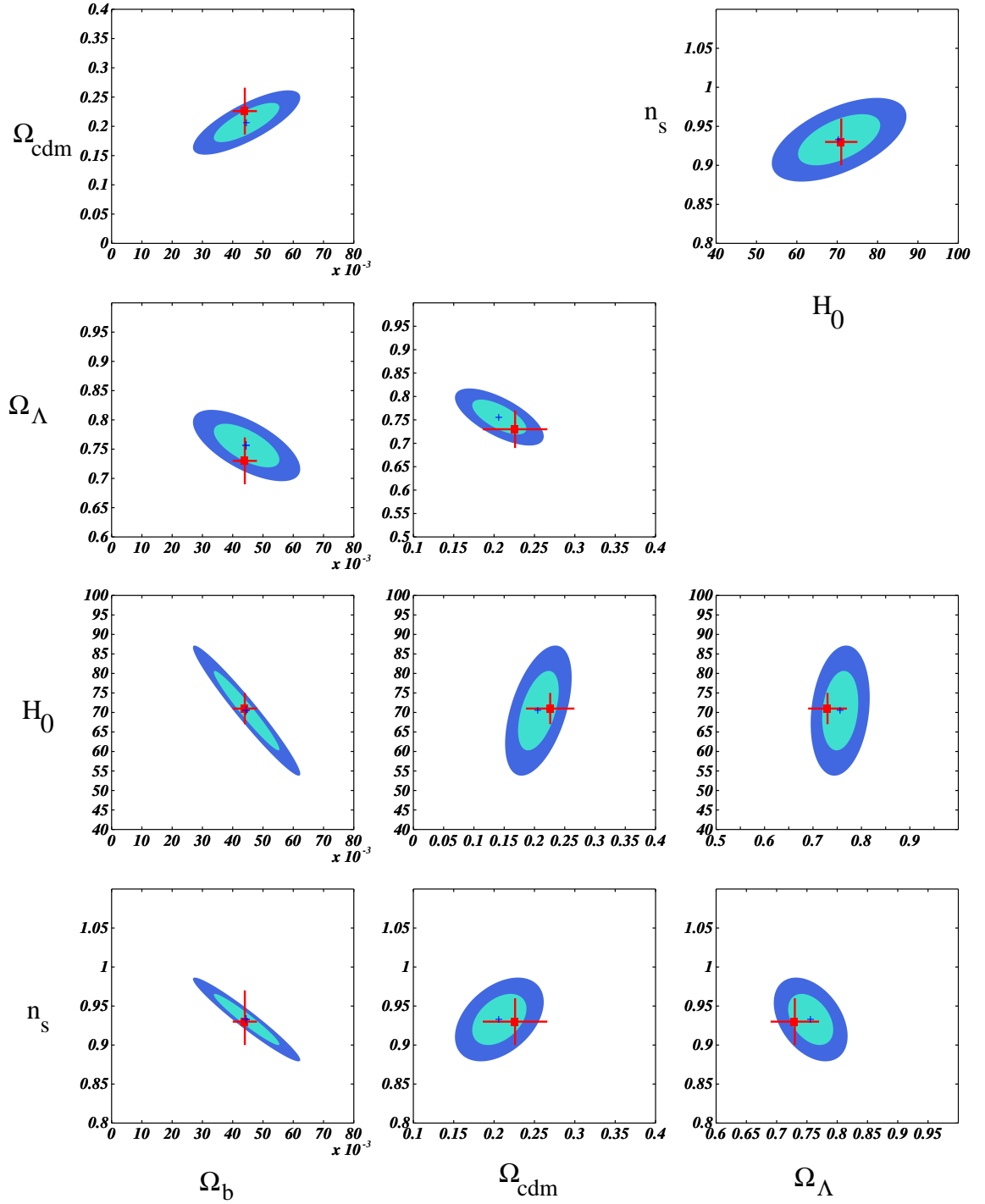


FIG. 5.48 – Ellipses des erreurs pour toutes les paires de paramètres possibles. On a représenté les ellipses à 68 (bleu turquoise) et 95% (bleu clair) de confiance, ainsi que les paramètres cosmologiques estimés par la collaboration WMAP avec leurs erreurs (croix rouges).

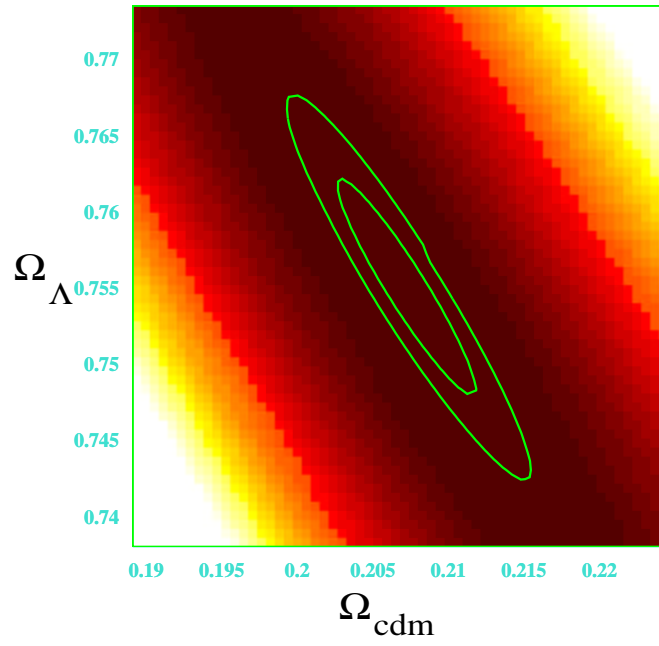


FIG. 5.49 – *Parcours de l'espace des paramètres à deux dimensions ($\Omega_{\text{cdm}}, \Omega_{\Lambda}$). Les autres paramètres sont fixés à leur valeurs obtenues dans notre analyse. Les ellipses représentées sont les ellipses à 68 et 95 % de confiance.*

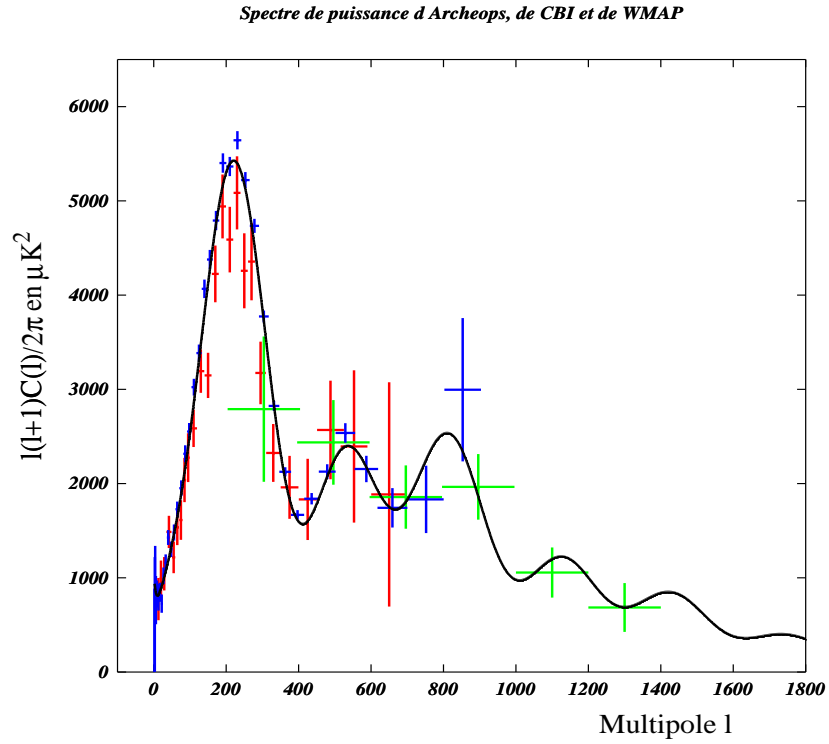


FIG. 5.50 – Ajustement du spectre de C_ℓ publié par les expériences Archeops, CBI et WMAP. Les données Archeops sont en rouge, les données CBI en vert et les données WMAP en bleu, le modèle ajusté est en noir.

Ces résultats restent compatibles avec les résultats de WMAP seul, mais il est nécessaire d'inclure dans l'ajustement les différentes normalisations des expériences pour obtenir des résultats fiables.

Bibliographie

- Bennett, C. L. et al. 2003, *Astrophysical Journal Supplement*, 148, 1
- Benoît, A. et al. 2003, *Astronomy & Astrophysics*, 399, L19
- Benoît, A., et al. 2003, *Astronomy & Astrophysics*, 399, L25
- Bourrachot A., *Contribution à l'analyse des données d'Archéops et à la mesure de la masse des neutrinos avec les expériences CMB.*, Thèse de doctorat, Université Paris Sud, Orsay, 2004
- Christensen, N. & Meyer, R. 2001, *Physical Review D*, 64, 022001
- Colless, M., et al. 2001, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 328, 1039
- Kuo, C.-L., et al. 2002, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 34, 1324
- Lamarre, J. M., et al. 2003, *New Astronomy Review*, 47, 1017
- Pearson, T. J. et al. 2003, *Astrophysical Journal*, 591, 556
- Press, H. W., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., "Numerical Recipes in C", 1988, Cambridge University Press
- Spergel, D. N., et al. 2003, *Astrophysical Journal Supplement*, 148, 175
astro-ph/0411633, soumis à *Astronomy et Astrophysics*
- Verde, L., et al. 2003, *Astrophysical Journal Supplement*, 148, 195

Conclusion, perspectives

Nous avons développé une méthode d'ajustement des paramètres cosmologiques se basant sur la minimisation du χ^2 et l'interpolation des spectres de puissance (à l'aide d'une base de données de spectre de puissance pré-calculés). L'ajustement des paramètres par cette méthode présente plusieurs avantages par rapport aux autres méthodes d'estimation des paramètres (Monte-Carlo Markov Chain ou parcours de l'espace des paramètres) :

- l'ajustement est un processus rapide pour l'estimation de ces paramètres. Cette rapidité est un avantage en soi, mais permet aussi, comme je l'ai fait, d'effectuer des tests de type Monte-Carlo sur la précision et le biais apportés par la méthode d'estimation des paramètres cosmologiques. Ces tests nous ont permis de mieux comprendre les effets du pas de la base de données sur les estimations, puis de les corriger en utilisant une base dont le pas est plus petit.
- la méthode employée fournit les erreurs et les corrélations existant entre les paramètres à partir de la courbure locale de la surface de χ^2 . Les études Monte-Carlo effectuées ont montré la fiabilité de cette méthode d'estimation des erreurs.

Notre estimation des paramètres cosmologiques conduit aux valeurs de la table suivante, en utilisant les données les plus récentes de l'expérience WMAP.

Paramètres	Ω_b	Ω_{cdm}	Ω_Λ	H_0	n_s
Valeurs	0.045	0.20	0.76	70	0.93
Erreurs	0.007	0.02	0.02	6.7	0.02
Erreurs relatives (%)	18	12	3	11	2

Notre analyse nous a permis d'estimer des barres d'erreurs sur les paramètres cosmologiques telles qu'elles pourraient être en 2010 après l'analyse des résultats de Planck (table suivante).

Paramètres	Ω_b	Ω_{cdm}	Ω_Λ	H_0	n_s
Erreurs	$7 \cdot 10^{-4}$	0.003	0.003	0.4	$7 \cdot 10^{-4}$
Erreurs relatives (%)	1.5	1.2	0.4	0.6	0.07

La poursuite du travail présenté ici peut être envisagée sur deux voies complémentaires. D'une part, la technique développée peut être améliorée sur plusieurs points, parmi lesquels :

- prise en compte d'un nombre plus important de paramètres, en particulier l'amplitude des fluctuations scalaires et la profondeur optique

- de réionisation. Seule la prise en compte de la réionisation nécessite un calcul de spectres de puissance à inclure dans la base de données.
- l'utilisation de la fonction de vraisemblance ou d'une approximation en lieu et place du χ^2 comme fonction à optimiser,
 - un choix de paramètres plus pertinent ($\Omega_b h^2$ au lieu de Ω_b , Ω_{tot} ou Ω_k par exemple).
 - il est envisageable de calculer directement les spectres de puissance à l'aide du code numérique (CMBfast, CAMB) lorsque l'on s'approche des paramètres optimaux. Cette modification permettrait de s'affranchir de la précision limitée de l'interpolation dans l'estimation finale des paramètres cosmologiques, de leur erreurs et de la matrice de covariance.

D'autre part, l'ensemble de la procédure peut être étendue pour la prise en compte d'autres mesures, celles du spectre de polarisation du fond diffus, mais aussi les résultats d'autres observations cosmologiques (SNIa, catalogues de galaxies, distorsions gravitationnelles, ...).

Résumé

L'étude des anisotropies du fond de rayonnement cosmologique est actuellement un des outils les plus précis de la cosmologie. Elle permet à priori de déterminer un grand nombre de paramètres cosmologiques, comme les densités d'énergie totale (Ω_{tot}) ou de l'énergie sombre (Ω_Λ) qui gouvernent la géométrie de l'Univers, ou comme un des paramètre du modèle d'inflation, l'indice spectral scalaire n_s .

Après avoir présenté le cadre du modèle standard cosmologique, nous décrivons la physique qui donne naissance aux anisotropies du fond de rayonnement cosmologique. Des oscillations acoustiques dans l'Univers primordial amplifient les inhomogénéités de densités prédites par les modèles d'inflation et génèrent une série de pics dans le spectre de puissance des anisotropies.

La troisième partie du manuscrit concerne les différentes techniques d'observations des anisotropies, ainsi que les expériences récentes et à venir. Puis nous exposons notre méthode d'estimation des paramètres cosmologiques, qui se base sur un ajustement des paramètres par une recherche d'optimum, ici réalisée en utilisant le χ^2 comme critère d'optimisation. Nous appliquons cette méthode à des jeux de données simulées, représentatifs des expériences WMAP et Planck, afin d'évaluer les performances et la robustesse de l'analyse. Enfin, nous employons cette méthode pour analyser les données actuelles des expériences Archeops, CBI et WMAP. Cette analyse donne comme résultat la table de paramètres cosmologiques suivante :

Paramètres	Ω_b	Ω_{cdm}	Ω_Λ	H_0	n_s	χ^2
Valeurs	0.043	0.26	0.69	75	0.97	40
Erreurs	0.008	0.03	0.02	8.5	0.02	

comparable aux résultats donnés par la collaboration WMAP.